Dispensa - Capitolo 5_A

Applicazioni della teoria della domanda: la scelta tra lavoro e tempo libero e la funzione di offerta di lavoro

Il caso

Immaginate di avere trovato un'occupazione come barista; immaginate che vi sia stato riconosciuto un salario di 15 Euro per ogni ora di lavoro, e che vi sia stata accordata la possibilità di scegliere quante ore di lavoro svolgere in una settimana. Immaginate anche di avere scelto di lavorare per tre sere alla settimana, ciascuna sera per quattro ore, sicché alla fine lavorate per un totale di 12 ore alla settimana. Il reddito da lavoro (settimanale) che ottenete è quindi di 180 Euro, con il quale potete finanziare le vostre spese di consumo settimanali. Immaginate ora che il datore di lavoro, contento per la qualità del lavoro che svolgete, vi riconosca un incremento di remunerazione, e vi proponga un salario orario di 17 Euro, lasciandovi sempre la possibilità di scegliere quante ore lavorare. Di fronte alla nuova proposta, come pensate che reagireste: chiedereste di continuare a lavorare 12 ore alla settimana, oppure pensate che trovereste ottimale lavorare più o meno ore? E' verosimile che alcuni di voi rispondano che sceglierebbero di lavorare un numero maggiore di ore, altri che troverebbero viceversa ottimala lavorare di meno, e altri ancora che continuerebbero a lavorare esattamente 12 ore alla settimana.
Nella situazione di esempio appena illustrato, si immagina che l'individuo-lavoratore abbia la possibilità di *scegliere* quante ore lavorare, mentre nel mondo reale questo è solitamente oggetto della contrattazione bilaterale, se non addirittura di norme di legge, al di fuori della sfera di contrattazione o di scelta individuale.
In assenza di vincoli di legge, tuttavia, un incremento del salario orario comporta due diversi effetti: da un lato, risulta per il lavoratore più conveniente lavorare (anziché avere tempo libero o fare altre attività): il costo opportunità del tempo libero aumenta; questo dovrebbe portare il lavoratore a ritenere più conveniente incrementare il numero di ore lavorate. D'altro lato, però, l'incremento del salario orario consente di ottenere lo stesso reddito con un numero minore di ore lavorate, e questo dovrebbe portare a ridurre il numero di ore lavorate. Il primo effetto – vedremo– corrisponde ad un effetto di sostituzione, mentre il secondo è assimilabile ad un effetto di reddito.
La scelta su quanto lavorare e quante ore libere avere determina l'ammontare di reddito disponibile per finanziare i consumi. In questo capitolo studieremo come si determina la scelta ottimale sull'ammontare di lavoro, immaginando che il lavoratore possa scegliere effettivamente e liberamente quanto lavorare e quante ore di tempo libero godersi. Sappiamo che nel mondo reale, purtroppo, non sempre è così, e il tempo da dedicare al lavoro e al tempo libero spesso non è frutto di libere scelte.
Tuttavia, prima di prendere in considerazione gli effetti della impossibilità di scelta, studieremo quale sarebbe l'allocazione ottimale tra lavoro (che consente reddito e quindi consumo) e tempo libero, in un mondo ideale in cui ciascuno fosse nelle condizioni di effettuare questa scelta liberamente. Vedremo anche quale effetti esercita sulla scelta ottimale una variazione della remunerazione del lavoro e vedremo che è possibile che individui differenti reagiscano in modo differente alla medesima variazione nelle condizioni di salario.

5_A.1 Introduzione

Finora abbiamo assunto che il reddito sia un dato esogeno. In realtà, il reddito che un individuo può spendere per l'acquisto di beni di consumo, dipende (o può dipendere) da quanto egli "sceglie" di lavorare. In questo senso, il reddito disponibile, può essere interpretato come una variabile non più esogena, bensì endogena, spiegata all'interno di un modello di comportamento ottimale.
In questa sede assumiamo che quanto lavorare (e quanto tempo libero avere) sia frutto di una scelta del consumatore.
Il tempo libero è assunto essere un *bene*; quindi, il lavoro, di per sé, è un male. In altre parole, l'individuo trae utilità dal tempo libero, e non dal lavoro. Tuttavia, il lavoro consente di ottenere un reddito col quale finanziare i consumi. I consumi, sono un bene. Ogni consumatore avrà dei "gusti" (ossia delle preferenze) relativamente alle possibili combinazioni tra tempo libero e consumo. Le preferenze saranno rappresentate, come sempre, da funzioni di utilità. La utilità, nel modello che andiamo a presentare, dipende da consumo e tempo libero. Ovviamente, ciascun consumatore ambirebbe ad avere i più alti livelli possibili di consumo e di tempo libero. Purtroppo, però, è evidente che non è possibile aumentare contemporaneamente sia il livello di consumo sia il tempo libero: infatti, più tempo libero implica meno tempo lavorato e quindi meno reddito e meno consumo. In altre parole, esiste un *trade-off* tra tempo libero e consumi praticabili; ossia, la quantità di tempo libero e di consumo raggiungibili sono legate tra di loro (da un vincolo): più tempo libero si ha a disposizione (e perciò meno si lavora), minore sarà il livello di consumo ottenibile.
Come in ogni problema di scelta di consumo, allora, possiamo affermare che la scelta ottimale per un consumatore è rappresentata dalla combinazione tra tempo libero e consumo che consente di raggiungere la massima utilità possibile, compatibilmente con il rispetto di un vincolo. Il vincolo deriva dal fatto che in un giorno ci sono 24 ore e non di più: più ore si sceglie di lavorare (e quindi di finanziare consumo di beni), meno ore rimangono a disposizione per il tempo libero.

5_A.2 Le preferenze individuali su tempo libero e consumo

La scelta tra tempo libero e consumo viene effettuata dall'agente economico in base alle proprie preferenze.
Ogni agente è caratterizzato da una funzione di utilità del tipo $U = U(\ell, c)$, dove ℓ indica il tempo libero e *c* indica il consumo.
Assumiamo che sia ℓ sia *c* siano beni, ossia, l'utilità aumenta all'aumentare di ℓ e all'aumentare di *c*; in altre parole, l'utilità marginale di ℓ è positiva, e anche l'utilità marginale di *c* è positiva: dosi incrementali di tempo libero incrementano l'utilità e anche dosi incrementali di *c* incrementano l'utilità: in

simboli, $U'_\ell = \dfrac{\partial U}{\partial \ell} > 0$, $U'_c = \dfrac{\partial U}{\partial c} > 0$. Ancora, assumiamo che dosi incrementali di tempo libero aumentano l'utilità ma in misura via via decrescente; analogamente, dosi incrementali di consumo incrementano l'utilità complessiva, ma in misura via via minore; stiamo assumendo, cioè, che le utilità marginali di entrambi i beni (consumo e tempo libero) siano positive ma decrescenti; in termini formali, le derivate seconde della funzione di utilità rispetto a ciascuno dei beni sono negative: $U''_\ell < 0$, $U''_c < 0$. Le assunzioni sulle preferenze stanno a significare che l'utilità è crescente ma concava nel livello del consumo ed è crescente ma concava nella quantità di tempo libero. Le preferenze potranno essere rappresentate anche da una mappa di curve di indifferenza: ciascuna curva di indifferenza rappresenta l'insieme di combinazioni tra tempo libero e consumo che dà all'individuo il medesimo livello di utilità. Ovviamente, il consumatore sarà voglioso di raggiungere la più elevata possibile curva di indifferenza, perché più elevata è la curva di indifferenza, più alto il livello di soddisfazione raggiunta.

La Figura 1 fornisce tre rappresentazioni diverse delle preferenze del consumatore, tutte egualmente corrette: le prime due raffigurano l'utilità in funzione del livello di tempo libero (dato il consumo) e del consumo (dato il tempo libero), mentre la terza raffigura la mappa delle curve di indifferenza.

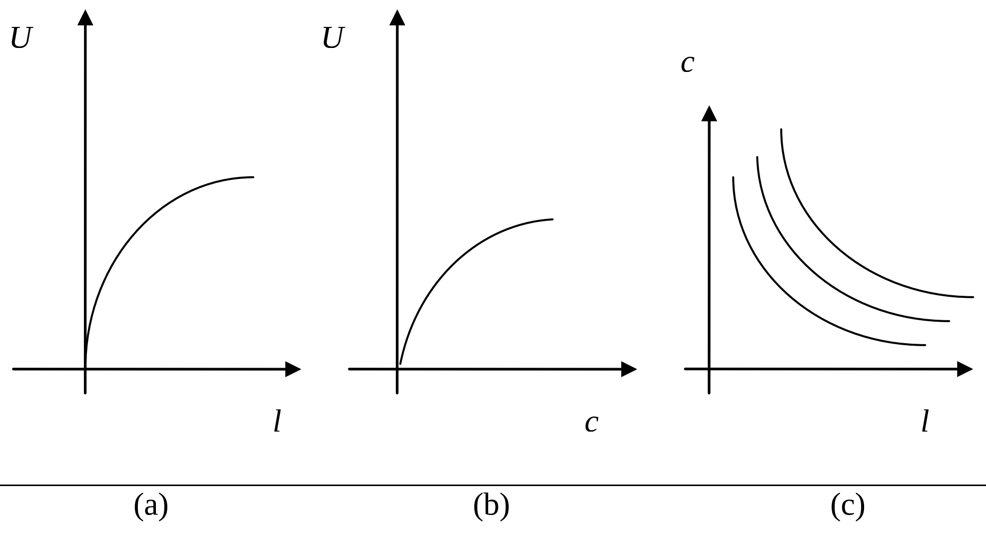

Figura 1 – Rappresentazioni delle preferenze del consumatore. Grafico (a): funzione di utilità (dipendente da tempo libero, dato il consumo); (b) utilità dipendente dal consumo (per dato livello di tempo libero) e mappa delle curve di indifferenza.

Se ragioniamo lungo una data curva di indifferenza, prendiamo in esame tutte le combinazioni tra tempo libero e consumo che forniscono al consumatore lo stesso livello di soddisfazione; lungo la curva di indifferenza, allora sarà possibile vedere a quanto consumo l'individuo è disposto a rinunciare, pur di avere un'unità in più di tempo libero e permanere sullo stesso livello di utilità. Questa grandezza rappresenta una disponibilità psicologica a sostituire un bene con un altro (a parità di soddisfazione) e prende il nome di saggio marginale di sostituzione tra tempo libero e consumo.

Definizione

Saggio Marginale di Sostituzione tra tempo libero e consumo, $\left|SMS_{\ell,c}\right|$***:*** *rappresenta l'ammontare di consumo cui l'individuo è disposto a rinunciare, pur di avere una unità in più di tempo libero, e permanere sullo stesso livello di utilità.*

E' agevole dimostrare che il saggio marginale di sostituzione fra tempo libero e consumo corrisponde al rapporto tra le utilità marginali del tempo libero e del consumo: $\left|SMS_{\ell,c}\right| = \frac{U'_\ell}{U'_c}$; questa grandezza corrisponde anche alla inclinazione (in valore assoluto) della curva di indifferenza, tracciata nello spazio $[\ell, c]$.

Approfondimento

Derivazione della espressione analitica del SMS

Data una funzione di utilità che abbia per argomenti l'ammontare di tempo libero e il livello del consumo, il differenziale totale della utilità vale:

$$dU = U'_\ell \, d\ell + U'_c \, dc \, .$$

Lungo una curva di indifferenza, l'utilità non varia, cioè il differenziale totale di utilità è zero, ossia vale dU=0; pertanto, lungo una curva di indifferenza, vale:

$$dU = U'_\ell \, d\ell + U'_c \, dc = 0$$

Da questa si ricava la seguente espressione, che sta a dire che lungo una curva di indifferenza (ossia, in corrispondenza di dU=0), deve valere:

$$\left.\frac{dc}{d\ell}\right|_{dU=0} = -\frac{U'_\ell}{U'_c}$$, che è scrivibile anche come $$\left.\frac{dc}{d\ell}\right|_{dU=0} = -\frac{\partial U / \partial \ell}{\partial U / \partial c}$$

L'espressione sopra riportata esprime come deve variare il consumo al variare del tempo libero, fermo rimanendo il livello di utilità. Questa espressione corrisponde esattamente al Saggio Marginale di Sostituzione tra tempo libero e consumo, che per l'appunto esprime come deve variare il consumo al variare del tempo libero, fermo rimanendo il livello di utilità. Il saggio marginale di sostituzione, algebricamente, è un numero negativo (poiché se aumenta il consumo deve diminuire il tempo libero, e viceversa); ovviamente, se ne considera in genere il valore assoluto, dando per scontato che i due argomenti della funzione di utilità, se sono beni, debbono muoversi in senso opposto tra loro, per far sì che l'individuo permanga sullo stesso livello di utilità.

Poiché $\partial U / \partial \ell$ rappresenta l'utilità marginale del tempo libero, e $\partial U / \partial c$ rappresenta l'utilità marginale del consumo, evidentemente il saggio marginale di sostituzione (in valore assoluto) fra tempo libero e consumo coincide con il rapporto fra le utilità marginali di tempo libero e consumo. In altri termini, il Saggio Marginale di Sostituzione fra tempo libero e consumo può essere perciò espresso in tutti i seguenti modi:

$$\left|SMS_{\ell,c}\right| = -\left.\frac{dc}{d\ell}\right|_{dU=0} = \frac{U'_\ell}{U'_c} = \frac{\partial U / \partial \ell}{\partial U / \partial c} = \frac{UMg_\ell}{UMg_c}.$$

(dove UMg è l'abbreviazione di 'Utilità marginale'). Il saggio marginale di sostituzione fra tempo libero e consumo corrisponde al rapporto tra le utilità marginali del tempo libero e del consumo. Il Saggio Marginale di sostituzione rappresenta, in questo caso (e come sempre), una *disponibilità psicologica*; nel caso specifico, a quanto consumo è l'individuo disposto a rinunciare pur di avere una dose in più di tempo libero. In conseguenza del fatto che l'utilità marginale di entrambi i beni è positiva ma decrescente, anche il Saggio Marginale di Sostituzione risulterà decrescente in funzione del tempo libero: più tempo libero si ha disposizione, a meno consumo si è disposti a rinunciare pur di avere una dose ulteriore in più di tempo libero. Graficamente, questo è coerente con l'andamento decrescente (e convesso) della curva di indifferenza.

Esempio

Un individuo ha preferenze tra tempo libero e consumo descritte dalla funzione di utilità $U(\ell, c) = \sqrt{\ell} + 2\sqrt{c}$. Determiniamo l'espressione dell'utilità marginale del tempo libero e l'espressione del saggio marginale di sostituzione tra tempo libero e consumo, e commentiamone l'andamento.

Per prima cosa si può notare che l'utilità è funzione crescente sia del tempo libero sia del consumo: entrambe le variabile, perciò, rappresentano dei beni per l'individuo.
L'utilità marginale del tempo libero corrisponde, analiticamente, alla derivata prima della utilità rispetto al tempo libero, ossia,

$$U'_\ell = \frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{1}{2\sqrt{\ell}}$$

Pertanto, l'utilità marginale del tempo libero è positiva, ma decrescente (la variabile ℓ, infatti, compare al denominatore).
Il Saggio Marginale di Sostituzione tra tempo libero e consumo, in questo caso, risulta:

$$\left|SMS_{\ell,c}\right| = \frac{U'_\ell}{U'_c} = \frac{1/(2\sqrt{\ell})}{1/\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{\ell}}$$

Si nota facilmente che il SMS è decrescente in ℓ, ossia: maggiore l'ammontare di tempo libero già scelto dal consumatore, è minore l'ammontare di consumo cui egli è disposto a rinunciare pur di avere una dose ulteriore di tempo libero.

Esercizio di autoverifica

Considerate un individuo con preferenze tra tempo libero e consumo descritte dalla funzione di utilità: $U(\ell,c)=\sqrt{\ell\cdot c}$.

a) Mostrate che il saggio marginale di sostituzione tra tempo libero e consumo è decrescente in ℓ e crescente in *c*.
b) Supponete che il consumatore in questione possa avere 8 ore di tempo libero al giorno e un consumo giornaliero *c*=2; quale ammontare di consumo gli darebbe la stessa utilità se avesse soltanto 6 ore di tempo libero?

[*Risposte:* (a) $\left|SMS_{\ell,c}\right|=c/\ell$; (b) *c*=8/3]

Naturalmente, è teoricamente possibile che per alcuni individui il tempo libero e il consumo siano **perfetti sostituti**: ciò vuol dire che il saggio marginale di sostituzione tra essi è costante: l'individuo in questione, cioè, è disposto a cedere sempre lo stesso ammontare di consumo pur di avere un'ora in più di tempo libero (e restare indifferente), qualsiasi sia l'ammontare di tempo libero e di consumo che egli già ha a disposizione. Analiticamente, il saggio marginale di sostituzione è costante nel caso in cui siano delle costanti sia l'utilità marginale del tempo libero, sia l'utilità marginale del consumo. Graficamente, le curve di indifferenza di un individuo per cui consumo e tempo libero sono perfetti sostituti, sono delle linee rette, negativamente inclinate, e la cui inclinazione, ovviamente, è pari al saggio marginale di sostituzione, costante.

Esempio

Consideriamo un individuo con preferenze tra tempo libero e consumo descritte dalla funzione di utilità: $U(\ell,c)=3\ell+2c$. Determiniamo il saggio marginale di sostituzione, e rappresentiamo la mappa delle curve di indifferenza.

Il saggio marginale di sostituzione tra tempo libero e consumo è

$$\left|SMS_{\ell,c}\right|=\frac{U'_{\ell}}{U'_{c}}=\frac{3}{2}\quad\text{(costante)}$$

Pertanto, l'inclinazione di ciascuna curva di indifferenza sarà costante e pari (in valore assoluto) a 3/2; graficamente, la famiglia di curve di indifferenza, in questo caso, è un fascio di rette (parallele) con inclinazione -3/2.

5_A.3 Il vincolo che lega fra loro tempo libero e consumo

Esistono un limite fisico e un limite di mercato alle possibilità di avere tempo libero e consumo. Il limite fisico è rappresentato dal fatto che il tempo a disposizione di un individuo, da ripartire tra tempo libero e lavoro, è limitato. Se indichiamo con *n* il tempo trascorso a lavorare dovrà valere $\ell+n=T$, dove T è il tempo complessivo. Ad esempio, se usiamo come unità di misura del tempo, le ore in un giorno, dovrà valere $\ell+n=24$ (ammesso che tutte le 24 ore siano allocabili fra lavoro e tempo libero). Ovviamente, se avessimo deciso di misurare il tempo in termini di giorni in un mese, dovremo scrivere $\ell + n = 30$. La scelta di quale unità di misura utilizzare è libera; ovviamente, però, bisogna poi essere coerenti: se si opta per misurare il tempo in termini di ore in un giorno, ovviamente poi il consumo sarà misurato in termini di unità di consumo al giorno; mentre se si ragiona in termini di giorni al mese (o all'anno), il consumo sarà quello mensile (o quello annuale).

Per fissare le idee, ragioniamo in termini di consumo giornaliero e di scelta di ore di tempo libero al giorno.

Il limite "di mercato" è rappresentato dal fatto che la spesa per consumo deve essere non-maggiore del reddito percepito.

Se il salario orario è *W*, il reddito guadagnato lavorando è quindi *Wn* (salario orario moltiplicato per le ore lavorate). Immaginiamo, in un primo momento, che il consumatore non abbia altri redditi se non quello da lavoro, sicché il reddito da lavoro coincide con il reddito complessivo dell'individuo; pertanto, *Wn* è la spesa massima che può egli effettuare per consumo. Se indichiamo con *P* il prezzo di un'unità di bene di consumo dovrà valere la diseguaglianza $P \cdot c \leq W \cdot n$, ossia, la spesa per consumo deve essere minore o uguale al reddito disponibile del consumatore. Naturalmente, se il vincolo fosse rispettato con il segno 'strettamente minore', vorrebbe dire che non tutto il reddito è speso: perciò, il consumatore non potrebbe raggiungere la massima utilità possibile; per questo motivo considereremo sempre il vincolo rispettato con il segno di eguaglianza, ossia $P \cdot c = W \cdot n$. Scrivere il vincolo in questo modo (col segno di eguaglianza), equivale ad imporre che non vi sia risparmio. Questa è una semplificazione che verrà rimossa in seguito. Poiché $\ell + n = 24$ e quindi $n = 24 - \ell$, il vincolo può anche essere scritto come:

$$P \cdot c = W \cdot (24 - \ell),$$

ossia $P \cdot c + W \cdot \ell = 24 \cdot W$. Questa ultima espressione si presta ad una interpretazione semplice. Il reddito potenziale massimo del consumatore è quello ottenuto lavorando 24 ore (e guadagnando 24*W*); con questo reddito potenziale può "acquistare" consumo (che comporta la spesa $P \cdot c$) e tempo libero (che comporta la spesa $W \cdot \ell$); il salario W perciò può essere anche interpretato come il prezzo del tempo libero (d'altra parte, il prezzo di un qualsiasi bene è sempre interpretabile come ciò cui un individuo è disposto a rinunciare pur di avere una unità di quel bene; nel caso specifico, il salario rappresenta ciò cui un individuo è disposto a rinunciare pur di avere un'ora di tempo libero).

Dividendo entrambi i membri del vincolo di bilancio per *P*, possiamo anche scrivere la stessa equazione del vincolo come segue:

$$c = \frac{W}{P} \cdot (24 - \ell)$$

Il rapporto tra salario nominale (*W*) e prezzo del bene di consumo (*P*) prende il nome di "salario reale"; indichiamo con la lettera greca omega il salario reale: $\omega = W / P$. Il salario reale corrisponde al consumo acquistabile col salario *W*.

Il vincolo di bilancio può quindi anche essere scritto come: $c = \omega \cdot (24 - \ell)$, ossia, $c = -\omega\ell + 24\omega$. Quest'ultima scrittura rende evidente che il vincolo di bilancio è un'equazione di primo grado nelle variabili (ℓ, c); perciò, nello spazio grafico (ℓ, c) è rappresentato da una retta. Tale retta di bilancio ha evidentemente inclinazione (ossia, coefficiente angolare) pari a $-\omega$ ed intercetta verticale 24ω.
L'intercetta verticale rappresenta il massimo ammontare di consumo che l'individuo può avere, quando le ore di tempo libero sono zero. Tale ammontare di consumo è 24*W*/*P*, ossia, 24ω.
L'inclinazione della retta di bilancio è negativa ed uguale, in valore assoluto, al salario reale; tale inclinazione rappresenta di quanto deve diminuire il consumo se aumenta una unità di tempo libero, dati il salario e il prezzo del bene di consumo: infatti, se aumenta di una unità il tempo libero, si ha un decremento di reddito pari a *W* e quindi un decremento del consumo pari a *W*/*P*.
E' importante capire bene la differenza tra questa grandezza, -*W*/*P*, e il saggio marginale di sostituzione: il saggio marginale di sostituzione rappresenta una *grandezza psicologica*, che ha a che fare con le preferenze del consumatore, ossia con i suoi "gusti": esso esprime –come già è stato detto– a quanto del bene di consumo l'individuo è psicologicamente disposto a rinunciare, pur di avere una unità in più di tempo libero ed avere la medesima utilità. Il salario reale, interpretato come inclinazione del vincolo di bilancio, invece, indica l'ammontare di consumo cui l'individuo *deve* rinunciare, se vuole avere un'ora in più di tempo libero (dati il prezzo del consumo e il salario).

Esempio

Consideriamo una situazione nella quale il salario orario è pari a 8 Euro, e il prezzo di un paniere di consumo è 2 Euro. Assumiamo di ragionare in termini di ore al giorno, e di consumo settimanale.
Scriviamo il vincolo di bilancio, rappresentiamolo graficamente e illustriamo il significato dei punti di intercetta sugli assi orizzontale e verticale.

Il vincolo sarà: $2c = 8 \cdot (24 - \ell)$: scritto in questo modo sta a significare che la spesa per consumo (2 Euro per il numero di panieri acquistati) deve essere uguale al salario orario moltiplicato per il numero di ore lavorate. Evidentemente, dividendo entrambi i membri dell'equazione, lo stesso vincolo può essere scritto anche come: $c = 4 \cdot (24 - \ell)$, ossia $c = -4\ell + 96$; quest'ultima scrittura rende evidente che il salario reale è pari a 4; ossia, in termini di panieri acquistabili, il salario unitario (8 Euro) equivale a 4 panieri reali (essendo il prezzo di ciascun paniere pari a 2): il salario monetario, 8 Euro, è equivalente, in termini di consumo reale, a 4 panieri. L'intercetta, 96, equivale all'ammontare di panieri di consumo che l'individuo potrebbe permettersi se avesse zero ore di tempo libero: infatti, in questo caso, con 24 ore di lavoro otterrebbe un salario monetario complessivo pari a $8 \times 24 = 192$ Euro, con i quali può acquistare esattamente 192:2=96 panieri.
Nel grafico, l'intercetta orizzontale rappresenta il massimo numero di ore di tempo libero che l'individuo può avere (24), in corrispondenza delle quali il

consumo è zero; l'intercetta verticale,invece, rappresenta il massimo numero di panieri di consumo acquistabili quando il tempo libero è zero.

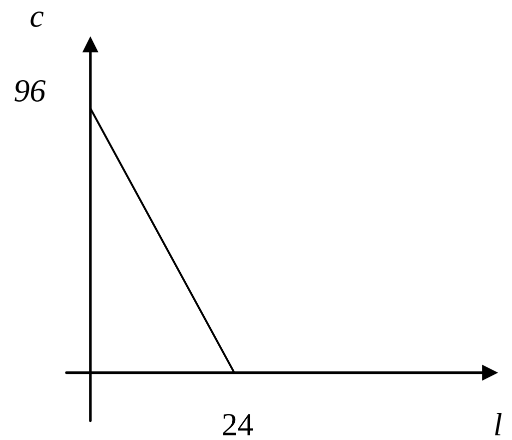

Figura 2 – Vincolo di bilancio: esempio con *W*=8, *P*=2.

Effetti di variazioni del salario reale. Se il salario reale varia, vuol dire che cambia la costosità relativa del tempo libero rispetto al bene di consumo. Un salario reale che aumenta sta a significare che il tempo libero diventa relativamente più costoso: infatti, "costerà più caro (in termini di rinuncia al consumo)" acquistare un'unità in più di tempo libero. Graficamente, la variazione del salario reale implica una modifica dell'inclinazione del vincolo di bilancio: a salari reali via via più elevati, corrispondono vincoli di bilancio via via più ripidi, ossia con inclinazione via via maggiore in valore assoluto; mentre, se il salario reale diminuisce, il vincolo di bilancio diventa più piatto.
Ovviamente, una variazione del salario reale può essere determinata da modificazioni del salario nominale (a parità di prezzi dei beni di consumo), ma anche da variazioni dei prezzi dei beni di consumo a parità di salario nominale: è chiaro, infatti, che se il salario monetario rimane costante, ma i prezzi dei beni di consumo aumentano, allora il salario reale risulterà diminuito. Ancora, è ovvio che se il salario nominale ed i prezzi variano della stessa proporzione (ad esempio, raddoppia il salario nominale e raddoppiano i prezzi; o aumenta del 10% il salario nominale e allo stesso tempo aumentano del 10% i prezzi dei beni di consumo), allora il salario reale resta invariato.

Effetti della presenza di redditi aggiuntivi, non derivanti da attività di lavoro. Nel caso che l'individuo possa contare su altri redditi, oltre a quello di lavoro, naturalmente il vincolo di bilancio si modifica perché il consumo può essere finanziato in modo differente rispetto al lavoro. Immaginiamo, ad esempio, che l'individuo possa contare su un reddito aggiuntivo pari a *M*: può essere un regalo della nonna, oppure i proventi da investimenti finanziari, oppure una vincita alla lotteria, ecc..
In tal caso il vincolo diventa il seguente: $P \cdot c = W \cdot (24 - \ell) + M$, ossia,

$c = \frac{W}{P} \cdot (24 - \ell) + \frac{M}{P}$, o ancora: $c = -\frac{W}{P} \cdot \ell + 24\frac{W}{P} + \frac{M}{P}$.
L'ammontare *M/P* corrisponde al valore reale del reddito aggiuntivo, ossia a quante unità di consumo possono essere acquistate con il reddito aggiuntivo: tale livello di consumo sarà praticabile anche in corrispondenza di zero ore di tempo lavorato. Se indichiamo con *m*=*M*/*P* l'ammontare della dotazione aggiuntiva, in termini reali (cioè espressa in unità del bene di consumo), allora il vincolo può anche scritto come segue: $c = -\omega \cdot \ell + 24\omega + m$. (Si ricordi che ℓ e *c* rappresentano le variabili di scelta nel problema di consumo, mentre m e ω rappresentano parametri, cioè grandezze che l'individuo prende per date e non può modificare.)
Dal punto di vista grafico, la presenza di un reddito aggiuntivo fa traslare verso l'alto, in parallelo, il vincolo di bilancio.
Chiediamoci perché il vincolo di bilancio si sposta parallelamente (verso l'alto), in presenza di un reddito aggiuntivo non-da-lavoro; la risposta è semplice e il motivo sta nel fatto che questo reddito aggiuntivo *non modifica* il salario reale (che dà l'inclinazione del vincolo), ma modifica solo la posizione del vincolo. La Figura 3 mostra come si sposta il vincolo di bilancio rappresentato nella Figura 2, se l'individuo può disporre di un reddito aggiuntivo pari, ad esempio, a 10 (ossia, a 5 panieri in termini reali).

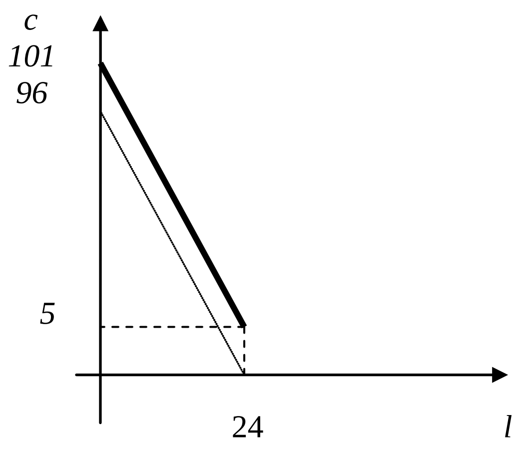

Figura 3. – Vincolo di bilancio nel caso che l'individuo abbia, oltre al reddito da lavoro un'ulteriore dotazione, paria 5 unità del bene di consumo.

5_A.4 La scelta ottimale

Siamo ora in grado di individuare la scelta ottimale di un individuo, nella combinazione tra tempo libero e consumo, ipotizzando che egli persegua la propria massima utilità, essendo soggetto ad un vincolo, che concettualmente deriva dal legame esistente tra consumo possibile e tempo libero possibile, dato che il tempo complessivo a disposizione è limitato, ed esiste un *trade-off* tra

tempo libero da un lato e tempo lavorato (e quindi reddito e spesa possibile) dall'altro.
La scelta ottimale può essere schematizzata come la risoluzione del seguente problema di massimo vincolato:

$$\underset{\ell,c}{Max} : U = U(\ell, c)$$

$$s.v.: \quad c = \frac{W}{P} \cdot (24 - \ell) + \frac{M}{P}$$

Il problema sopra scritto sta a significare che lì individuo intende massimizzare la sua utilità (avendo come variabili di scelta il tempo libero ℓ e il consumo *c*), ed essendo soggetto ad un vincolo di bilancio (che dipende dal salario, dai prezzi e dalle eventuali dotazioni di reddito aggiuntive).

Il problema può essere risolto per sostituzione, oppure con altri metodi analitici (ad esempio, con il metodo di Lagrange).
In tutti i casi, il punto ottimale sarà quel punto che giace sul vincolo di bilancio ed appartiene alla più elevata possibile curva di indifferenza.

Se il punto ottimale è un punto "interno", ossia con quantità positive di consumo e tempo libero, e se le curva di indifferenza sono "ben fatte" (ossia, presentano un saggio marginale di sostituzione decrescente), allora il punto di ottimo sarà necessariamente quello di tangenza fra curva di indifferenza e vincolo di bilancio, così come mostrato nella Figura 4.

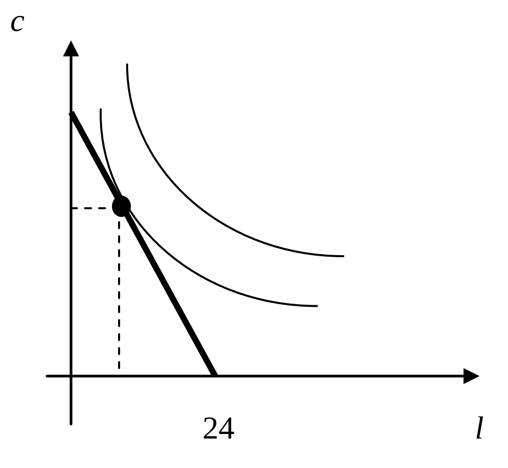

Figura 4 – Il punto di ottimo nella scelta fra tempo libero e consumo, nel caso di "ottimo interno"

Nel punto di ottimo interno, ha luogo la tangenza tra curva di indifferenza e vincolo di bilancio: in tale punto, l'inclinazione della curva di indifferenza (pari al saggio marginale di sostituzione tra tempo libero e consumo) risulta uguale all'inclinazione del vincolo di bilancio (pari al salario reale). In simboli, l’eguaglianza tra le inclinazioni di questi due luoghi geometrici richiede $SMS_{\ell,c} = -\frac{W}{P}$, ossia, cambiando di segno a entrambi i membri dell’eguaglianza:

$$\left|SMS_{\ell,c}\right| = \frac{W}{P}.$$

L’interpretazione economica di questa eguaglianza è la seguente: nel punto di ottimo (se interno) deve esserci coincidenza tra la disponibilità psicologica che il consumatore ha nel sostituire fra loro consumo e tempo libero (a parità di soddisfazione) e la possibilità economica che si ha nell’effettuare questa stessa sostituzione. In altri termini, il consumatore trova ottimo arrestarsi nel processo di sostituzione tra tempo libero e consumo esattamente nel momento in cui il SMS è uguale al salario reale.

Come nei problemi “usuali” di scelta di un paniere di consumo ottimale, la tangenza tra il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza (ossia, l’eguaglianza tra SMS e prezzo relativo), non è a rigore una condizione né necessaria né sufficiente per individuare l’ottimo: questa condizione non è necessaria, perché ci possono punti di ottimo che non sono punti di tangenza (ad esempio, soluzioni d’angolo); d’altro lato, ci possono essere punti di tangenza geometrica che non sono punti di ottimo.
La seguente Figura 5 mostra situazioni di questo tipo: i punti *T* sono punti di tangenza, ma non sono soluzioni ottimali; i punti ottimali sono denotati da *E*, ma non sono punti di tangenza (ossia, in corrispondenza dei punti *E* non si realizza l’eguaglianza $\left|SMS_{\ell,c}\right| = \frac{W}{P}$. Riprenderemo questo tema anche nel paragrafo conclusivo di questo Capitolo, trattando in modo specifico preferenze “non standard”, che danno luogo, appunto a soluzioni “non standard”.
Tuttavia, nella soluzione di problemi di scelta ottimale fra tempo libero e consumo, partiremo sempre valutando il punto di tangenza e poi valuteremo se questo punto rappresenti o meno la soluzione economica del problema in questione.

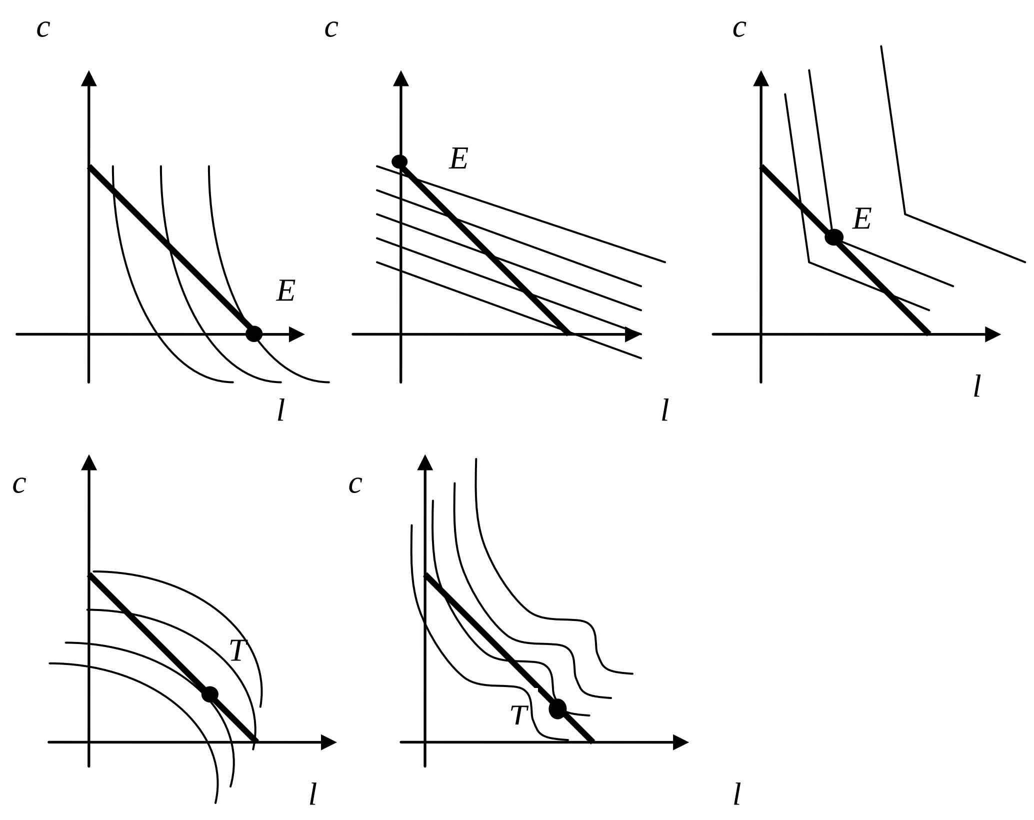

Figura 5. Soluzioni ottimali che non sono punti di punti di tangenza (*E*), e punti di tangenza (*T*) che non solo panieri ottimali.

Esempio

Consideriamo l'individuo caratterizzato da preferenze descritte dalla funzione di utilità $U(\ell, c) = \sqrt{c} + 2\sqrt{\ell}$. Egli non ha altri redditi se non quello da lavoro. Ragioniamo in termini di salario orario e consumo giornaliero. Assumiamo che il salario orario sia pari a 8 Euro e il prezzo del paniere di consumo sia 4.
Determiniamo l'offerta di lavoro, e conseguentemente il livello di consumo ottimale.

Data la funzione di utilità, il corrispondente SMS tra tempo libero e consumo risulta essere $\left|SMS_{\ell,c}\right| = \dfrac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\ell}}$.
Notiamo che il $SMS_{\ell,c}$, in valore assoluto, è decrescente in ℓ (e crescente in *c*) e dunque corrisponde a preferenze "ben conformate".
Inoltre, il salario reale risulta essere $\omega \equiv W / P = 8/4 = 2$.
Per determinare l'allocazione ottimale partiamo considerando la condizione di tangenza tra curva d'indifferenza e vincolo di bilancio, nonché il rispetto del vincolo di bilancio medesimo:

$$\begin{cases} \left|SMS_{\ell,c}\right| = \omega & \Rightarrow \quad \dfrac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\ell}} = 2 \\ \text{vincolo di bil.} & \Rightarrow \quad c = 2(24-\ell) \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema di due equazione nelle due incognite ℓ,c è molto semplice: dalla prima equazione, elevando entrambi i membri al quadrato, si ottiene $c = \ell$ e sostituendo nella seconda si ha $\ell = 2(24-\ell)$, da cui $3\ell = 48$, ossia, $\ell^* = 16$. Poiché $c = \ell$, risulterà $c^* = 16$. In altre parole, il paniere di tangenza è quello che contiene 16 ore di tempo libero. Per differenza si trova che il tempo ottimale lavorato è n^*=(24-16)=8 (il tempo ottimale lavorato rappresenta l'offerta di lavoro).
Discorsivamente, l'individuo trova ottimale lavorare 8 ore; così facendo ottiene una remunerazione complessiva pari a 64. Poiché il prezzo del paniere di consumo è 4, è evidente che col reddito ottenuto può acquistare 64/4=16 panieri.
Poiché il Saggio marginale di sostituzione (in valore assoluto) è giustamente decrescente (ossia, le curva di indifferenza sono convesse verso l'origine) e il punto di tangenza ha senso economico, possiamo essere sicuri che esso è anche l'ottimo economico.

Esercizio di autoverifica

Prendete in esame l'individuo appena considerato nell'esempio precedente e stabilite come si modifica la sua offerta di lavoro se, oltre al reddito da lavoro, può contare su un altro reddito aggiuntivo, pari a 12 Euro al giorno.

[*Risposta:* si modifica il vincolo di bilancio, che diventa …; la soluzione del sistema porta a trovare n^*=7: un aumento del reddito determina che l'individuo lavori meno.]

5_A.5 La funzione di offerta di lavoro

Siamo ora interessati a valutare come si modifica l'offerta di lavoro (ossia, la quantità ottimale di tempo lavorato da parte di un individuo) al variare del salario reale.

Proposizione

Nel problema di scelta ottimale tra tempo libero e consumo, il consumatore esprime una ***domanda*** di tempo libero e una ***domanda*** di consumo (diremo, brevemente, che *l'individuo domanda tempo libero e consumo*).
Sul mercato del lavoro, invece, l'individuo ***offre*** lavoro: egli ha a disposizione un tempo complessivo e sceglie quanto offrirne sul mercato del lavoro.
Contrariamente all'uso giornalistico più diffuso, quindi, la teoria economica usa con precisione i termini domanda e offerta, in riferimento al mercato del lavoro. In particolare, ***sul mercato del lavoro, le imprese domandano il lavoro, mentre gli individui lo offrono.***
Pertanto, vi è una situazione di disoccupazione, quando la domanda di lavoro (da parte delle imprese) è minore dell'offerta di lavoro (espressa dagli individui-consumatori); in altri termini, la disoccupazione corrisponde ad un eccesso di offerta di lavoro. Invece, quando vi è un eccesso di domanda di lavoro, vuol dire che le imprese vorrebbero impiegare più lavoro di quanto ve ne sia disponibile (al salario corrente).

In termini grafici, già sappiamo che se varia il salario reale, varia l'inclinazione del vincolo di bilancio. Di conseguenza, varierà anche il punto ottimale, ossia la combinazione tra tempo libero e consumo; pertanto, varierà anche l'ammontare ottimale di tempo lavorato.
I tre pannelli della Figura 6 mostrano che, in linea di principio, è possibile che – a seguito di un incremento del salario reale– possa succedere una delle tre situazioni:

(a) Il tempo libero ottimale diminuisce (e quindi il tempo ottimale lavorato aumenta);
(b) Il tempo libero ottimale aumenta (e quindi il tempo ottimale lavorato diminuisce)
(c) Il tempo libero ottimale rimane esattamente invariato (e quindi anche la quantità ottimale di tempo lavorato rimane invariata)

(In figura 6 si prende in esame una situazione di equilibrio iniziale, contrassegnata dal punto ottimale con il pallino; a seguito dell'aumento del salario reale, il vincolo di bilancio varia –e diventa la retta in grassetto; il nuovo punto ottimale è quello contrassegnato dalla stelletta. Se ci si concentra sul tempo libero, si vede facilmente che il nuovo punto ottimale (stelletta) può cadere a sinistra, oppure a destra rispetto al vecchio ottimale, o anche esattamente sulla stessa verticale). Ciò vuol dire che l'ammontare ottimale di tempo libero risulta, rispettivamente minore, maggiore o esattamente uguale a quello presente nel "vecchio" paniere ottimale iniziale.
Se ripetiamo l'esperimento di fare variare ulteriormente il salario reale, possiamo trovare come si modifica ulteriormente la scelta ottimale tra tempo libero e consumo (e di nuovo potrebbero capitare i tre casi possibili, di una diminuzione, oppure un aumento o un ammontare invariato di tempo libero ottimale). Potremmo trovare il valore ottimale del tempo lavorato, per ogni possibile valore del salario reale. E' evidente che, in generale, all'aumentare del salario reale, sono possibili i tre casi:

(a) All'aumentare del salario reale, aumenta l'offerta di lavoro (ossia, l'offerta di lavoro è una funzione crescente del salario reale;
(b) All'aumentare del salario reale, diminuisce l'offerta di lavoro (ossia, l'offerta di lavoro è una funzione decrescente del salario reale;
(c) All'aumentare del salario reale, l'offerta di lavoro rimane costante (ossia, l'offerta di lavoro è una funzione costante del salario reale.

Queste tre possibilità sono rappresentate nei tre pannelli della Figura 7, i quali corrispondono , concettualmente, ai tre pannelli della Figura 6.

La funzione che lega l'ammontare ottimale di lavoro offerto da un individuo e al salario reale prende il nome di funzione di offerta di lavoro: essa ci dice, cioè, come varia la scelta ottimale di lavoro offerto, al variare del salario reale.

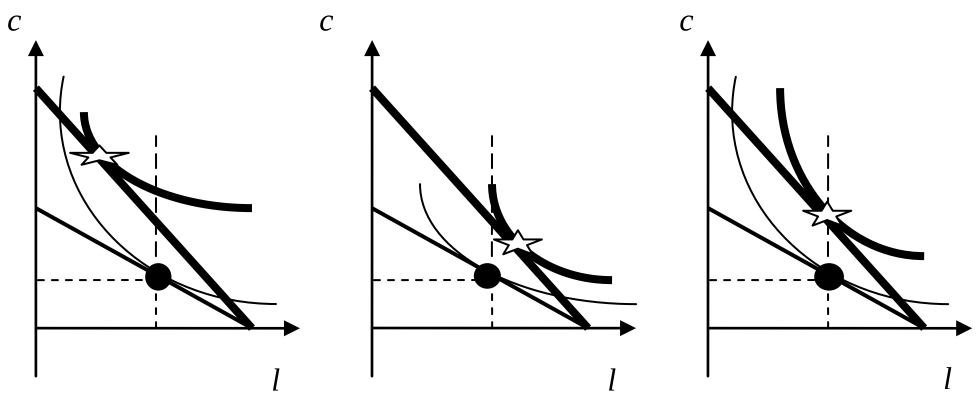

Figura 6 – Scelta ottimale tra tempo libero e consumo al variare del salario reale.

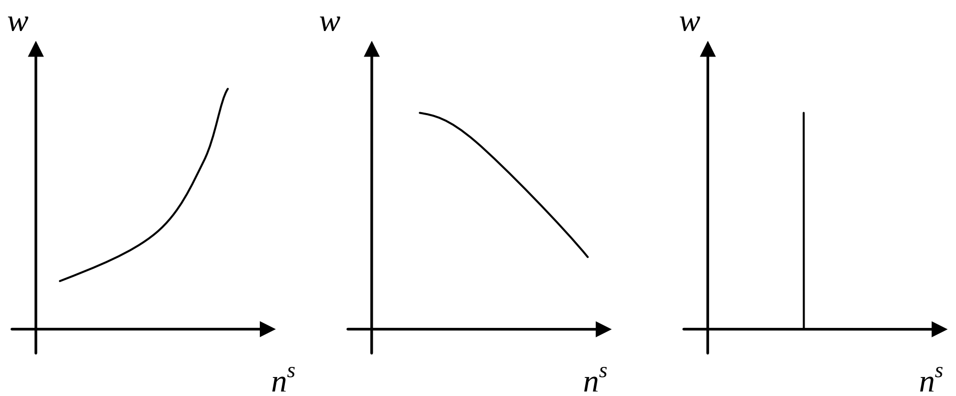

Figura 7 – Come varia l'offerta di lavoro al variare del salario reale.

Definizione

Funzione di offerta di lavoro: la funzione che lega l'ammontare di lavoro offerto da un individuo al salario reale; è pertanto una funzione del tipo $n^S = f(\omega)$

Dal punto di vista teorico, la funzione di offerta di lavoro può essere crescente, decrescente o costante nel salario reale, come mostrato nelle Figure 7. Si noti anche che le Figure 7 sono rappresentate adottando la convenzione anglosassone (la variabile dipendente, n^s è misurata in orizzontale e la variabile indipendente o esplicativa è misurata sull'asse verticale).
La funzione di offerta di lavoro può anche essere non-monotonica, ossia con tratti crescenti e tratti decrescenti. Questo caso, rappresentato dalla Figura 8,

non soltanto può essere possibile dal punto di vista teorico, ma anzi sembra proprio quello più realistico (ossia quello più frequentemente osservato nel mondo reale), sulla base delle evidenze empiriche.
Il comportamento, realistico, rappresentato in Figura 8, sta a significare questo: se il salario reale è basso, un suo incremento porta l'individuo a lavorare di più; questo succede però soltanto fino ad un certo livello soglia di salario; oltrepassata questo livello-soglia, ulteriori aumenti del salario reale inducono il lavoratore a reagire abbassando l'offerta di lavoro.

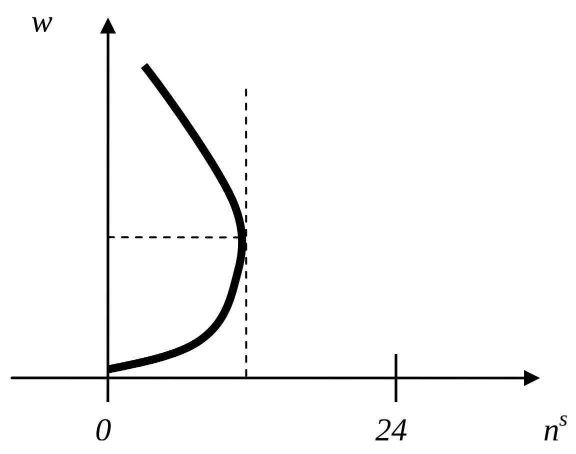

Figura 8. Funzione di offerta di lavoro non monotonica

Il fatto che siano possibili tutti gli esiti, in relazione a come l'offerta di lavoro reagisce a variazione del salario reale, dipende da come si combinano l'effetto reddito e l'effetto sostituzione. Un aumento del salario reale, infatti, vuol dire che il tempo libero diventa relativamente più costoso (rispetto al consumo dei beni). L'effetto sostituzione porterà il consumatore a domandare meno tempo libero e più bene di consumo (questo vuol dire che l'offerta di lavoro ***aumenta***).
Un aumento del salario, però, comporta anche un "effetto reddito", ed in particolare un "effetto reddito da dotazione": infatti, ogni individuo è dotato di 24 ore al giorno; il valore delle 24 ore di tempo che il consumatore ha a disposizione aumenta, se il salario reale aumenta: se entrambi i beni (consumo e tempo libero) sono ***normali***, allora il consumatore domanda una maggiore quantità sia di consumo sia di tempo libero: ciò vuol dire che ***diminuisce*** l'offerta di lavoro.
All'aumentare del salario reale, perciò,

- Se prevale l'effetto di sostituzione, allora aumenta l'offerta di lavoro;
- Se prevale l'effetto di reddito, allora diminuisce l'offerta di lavoro;
- Se l'effetto reddito e l'effetto sostituzione si compensano perfettamente, allora l'offerta di lavoro rimane immutata (in questo caso, si può anche dire che l'offerta di lavoro è totalmente inelastica al salario reale).

Questo è il motivo per cui sono osservabili, teoricamente tutti gli andamenti.
Il fatto che –abbiamo detto– nel mondo reale sia frequente osservare funzioni di offerta di lavoro non monotoniche (prima crescenti e poi decrescenti, mano a mano che il salario reale aumenta) sta a significare quanto segue: per bassi livelli di salario reale, un aumento del salario stesso è associato ad una prevalenza dell'effetto sostituzione sull'effetto reddito (il consumatore dà più peso al fatto che il tempo libero diventa più costoso e lo sostituisce con tempo lavorato e quindi consumo); invece, per alti valori del salario reale, un ulteriore incremento del salario stesso è associato ad una prevalenza dell'effetto di reddito (l'individuo dà più peso al fatto che il suo reddito potenziale diventa maggiore e lo impiega per compare sì più beni di consumo, ma anche più tempo libero).
Per trovare la funzione di offerta di lavoro è sufficiente risolvere in modo usuale il problema di scelta tra tempo libero e consumo, lasciando indicato parametricamente il valore del salario reale (ossia, senza sostituirlo con uno specifico valore numerico). Si tratterà poi di studiare come l'ammontare ottimale di tempo lavorato (offerta di lavoro) dipende proprio dal salario reale.

Esempio

Consideriamo un individuo con preferenze descritte dalla funzione di utilità $U(\ell, c) = \sqrt{c} + \sqrt{\ell}$, cui corrisponde $SMS_{\ell,c} = \sqrt{c}/\sqrt{\ell}$. Egli non ha altri redditi se non quello da lavoro.
Determiniamo la sua funzione di offerta di lavoro.

Il paniere ottimale dell'individuo sarà descritto dal sistema seguente:

$$\begin{cases} SMS_{\ell,c} = \omega \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{\ell}} = \omega \\ vincolo\ di\ bil. \quad \Rightarrow \quad c = \omega(24 - \ell) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema per sostituzione, dalla prima equazione ricaviamo $c = \omega^2 \ell$, che –sostituito nella seconda– porta a: $\omega\ell = (24 - \ell)$, da cui: $\ell = 24/(\omega + 1)$. A questo punto, possiamo trovare anche il consumo, $c = 24\omega^2/(\omega + 1)$, anche se non è esplicitamente richiesto dal problema che stiamo affrontando. Tuttavia, siccome vogliamo trovare la funzione di offerta di lavoro, ciò che possiamo scrivere è che il tempo di lavoro ottimale è semplicemente 24 ore meno la domanda di tempo libero, ossia:

$$n^s = 24 - \frac{24}{\omega + 1}$$

Questa è proprio la funzione di offerta di lavoro: infatti, è una funzione che lega l'offerta di lavoro al salario reale.
Potremmo (o meglio, dovremmo) studiare compiutamente questa funzione, per stabilirne l'andamento.

Tuttavia è abbastanza immediato osservare che:

- per ogni valore di salario reale positiva, n^s è sempre (giustamente) positivo e più piccolo di 24 (cioè, risulta sempre soddisfatta per ogni salario reale positivo, la sequenza di diseguaglianze $0 \leq n^s \leq 24$);
- la funzione n^s è crescente in ω (ed infatti ω compare al denominatore, ma preceduto da un segno negativo); ciò sta ad indicare che quando aumenta il salario reale, allora l'effetto di sostituzione (che comporta un aumento dell'offerta di lavoro) prevale sull'effetto di reddito (che comporta invece una aumento del consumo e del tempo libero)

Esercizio di autoverifica

Le preferenze di un agente tra tempo libero e consumo sono rappresentate dalla funzione di utilità $U(\ell, c) = \log(\ell) + \frac{1}{2}\log(c)$, cui corrisponde $SMS_{\ell,c} = 2c/\ell$. Si determini la funzione di offerta di lavoro, nell'ipotesi che il consumatore, oltre al reddito da lavoro disponga di un reddito aggiuntivo pari, in termini reali, a 60 unità del bene di consumo.

[*Risulta:* n^s=8-(40/*w*).]

5_A.6 La scelta tra tempo libero e consumo, nel caso di preferenze non standard.

Anche nel caso della scelta fra tempo libero e consumo, non si può escludere che qualche individuo abbia delle "stranezze" circa le preferenze. Queste stranezze possono dare luogo a scelte ottimali inusuali (che tuttavia talvolta osserviamo davvero, anche nel mondo reale).
Nel caso, ad esempio, che le curve di indifferenza siano lineari (ossia, che il saggio marginale di sostituzione tra tempo libero e consumo è costante), non si potrà mai avere tangenza tra curva di d'indifferenza e vincolo di bilancio, dato che anche il vincolo di bilancio è una retta.
I casi che si possono determinare con preferenze lineari sono rappresentati nelle seguenti Figure 9.
Il paniere ottimale che si determina è una soluzione d'angolo (che potrà prevedere 0 ore di tempo libero e il massimo consumo possibile, utilizzando il reddito che deriva dalle 24 ore di lavoro; oppure, al contrario, 24 ore di tempo libero e consumo pari a zero), oppure la scelta sarà indeterminata se l'inclinazione del vincolo di bilancio coincide con quella delle curve di indifferenza, per cui l'intero vincolo di bilancio viene a coincidere con una curva di indifferenza, e tutti i punti acquistabili sono ritenuti indifferenti dal consumatore.
E' evidente che, nel caso di preferenze lineari, quale soluzione ottimale si determina dipende dalla inclinazione relativa di curve di indifferenza e vincolo di bilancio: se le curva di indifferenza sono più piatte del vincolo (ossia $SMS_{\ell,c} < \omega$.), il consumatore troverà ottimale avere zero ore di tempo libero,e l'offerta di lavoro sarà la massima possibile; al contrario se $SMS_{\ell,c} > \omega$, la

scelta ottimale prevede un'offerta di lavoro pari a zero.

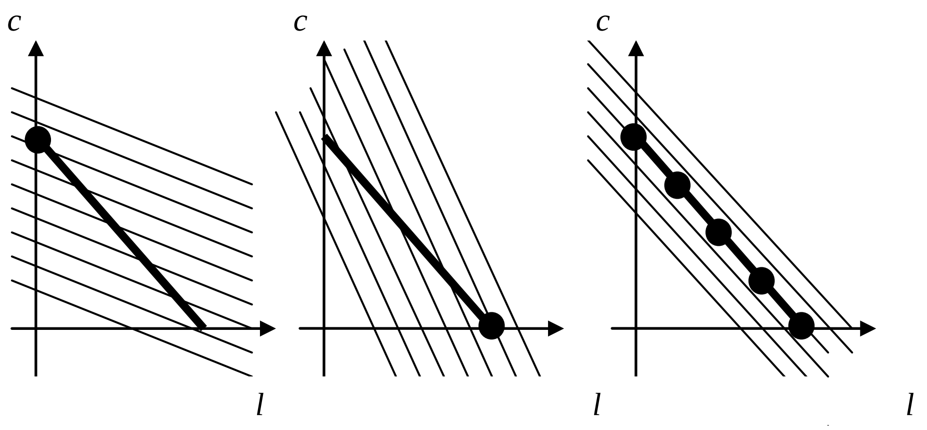

Figura 9. La scelta ottimale tra consumo e tempo libero con preferenze lineari.

Esercizio di autoverifica

Ipotizzate che un consumatore abbia preferenze lineari del tipo $U(\ell,c)=2\ell+(c)$; in questo caso,il saggio marginale di sostituzione tra tempo libero e consumo, in valore assoluto è costante e pari a 2.
Disegnate (nel grafico (ω,n^s)) la funzione di offerta di lavoro.

[*Suggerimento*: ragionate dapprima nel grafico (ℓ,c), e osservate che per tutti i livelli di salario reale compresi tra 0 e 2, l'offerta di lavoro è …; quando il salario reale diventa pari a 2, allora l'offerta di lavoro è …; e infine per tutti i valori di salario reale maggiore di 2, l'offerta di lavoro diventa…; il grafico della funzione di offerta di lavoro sarà dunque una spezzata …]

Soluzioni d'angolo emergono anche nel caso in cui l'ottimo "matematico" del problema di massimizzazione dell'utilità vincolata dà luogo a combinazioni tra tempo libero e consumo che non hanno significato economico. Ad esempio, se il problema matematico di massimizzazione vincolata portasse ad una soluzione in cui n^s=26, è chiaro che questa configurazione non è ammissibile, per cui l'ottimo economico sarebbe il punto in cui n^s=24 (o, più verosimilmente, il massimo consentito dalla legge, che non è certo 24!); il consumo ottimale andrebbe a questo punto ricalcolato, tenendo conto delle effettive ore lavorate dall'individuo. Simmetricamente, è talvolta possibile trovare una soluzione matematica al problema di ottimo vincolato, in cui il consumo o il tempo libero assumono valori negativi; questi non hanno significato economico per cui è evidente che l'ottimo economico si trova in corrispondenza di una soluzione di frontiera in cui la variabile di scelta non assume il valore negativo (fornito dalla soluzione matematica), ma viene posto dal consumatore uguale a zero (o al valore più piccolo possibile)

Esempio

Ipotizziamo che un consumatore abbia preferenze descritte dalla funzione $U(\ell, c) = \ell + 2\log(c)$; in questo caso, il saggio marginale di sostituzione tra tempo libero e consumo, in valore assoluto è *c*/2. Inoltre, il consumatore dispone di una dotazione reale aggiuntiva pari a 6 unità di consumo.
Troviamo l'offerta di lavoro quando il salario reale è pari a 1; troviamo poi la funzione di offerta di lavoro.

Partiamo notando che il Saggio marginale di sostituzione tra tempo libero e consumo non è decrescente nel tempo libero. Già questo fatto deve destare attenzione. In verità, il Saggio marginale di sostituzione stesso è crescente in *c* per cui le curve di indifferenza sono comune ben conformate, anche se è constante in ℓ. (Queste caratteristiche dipendono dal fatto che la funzione di utilità è di tipo ***semi-lineare***, ossia lineare in un argomento e poi crescente e concava negli altri).
Il sistema di tangenza tra curve di indifferenza e vincolo di bilancio richiede:

$$\begin{cases} SMS_{\ell,c} = \omega & \Rightarrow \quad \dfrac{c}{2} = 1 \\ vincolo\ di\ bil. & \Rightarrow \quad c = 1 \cdot (24 - \ell) + 6 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava *c*=2; sostituito nella seconda si trova: $2 = 24 - \ell + 6$, da cui $\ell = 28$. Ora, è evidente, che è impossibile avere 28 ore al giorno di tempo libero! Pertanto, la scelta economica dovrà comunque essere $\ell = 24$. L'offerta di lavoro è pertanto zero. Si osservi, anche, che il livello di consumo effettuabile non è 2 (come indica la soluzione matematica del problema), ma va ricalcolato, in corrispondenza della soluzione d'angolo. In particolare, con offerta di lavoro pari a zero, il reddito da lavoro è zero. Tuttavia, il consumatore dispone di un reddito aggiuntivo pari a 6 unità di consumo; evidentemente, egli può consumare tutta questa dotazione, per cui il consumo ottimale risulterà *c*=6. In altre parole, questo individuo trova ottimale non lavorare e consumare *tutto e solo* ciò che riceve. (Se fosse possibile, anzi, vorrebbe avere ancora più tempo libero di quello fisicamente disponibile e troverebbe ottimale ridurre il proprio consumo a livello *c*=2! Una tale allocazione, però, non ha significato).

Per trovare la funzione di offerta di lavoro, dobbiamo lasciare il livello del salario reale indicato parametricamente, in modo da trovare l'ottimo non già per uno specifico livello di salario, ma per tutti i possibili livelli.
Il problema va impostato come segue:

$$\begin{cases} SMS_{\ell,c} = \omega & \Rightarrow \quad \dfrac{c}{2} = \omega \\ vincolo\ di\ bil. & \Rightarrow \quad c = \omega \cdot (24 - \ell) + 6 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $c = 2\omega$ e poi dalla seconda $\ell = 22 + (6/\omega)$.
E' evidente che questa soluzione ha senso soltanto se il tempo libero è un valore compreso tra zero e 24. Sicuramente $\ell = 22 + (6/\omega)$ è maggiore di 0, ma non è detto che sia più piccolo di 24; in particolare, risulta minore di 24 soltanto se $\omega > 3$. Per tutti i valori di salario reali più piccoli di 3, si cadrà in soluzione d'angolo. (Quello che in verità dobbiamo richiedere è che il tempo libero sia minore o uguale a 24, ossia $\omega \geq 3$; se fosse esattamente $\omega = 3$, la scelta ottimale sarebbe proprio esattamente 24, ammissibile).
La discussione può essere fatta direttamente riferita alla funzione di offerta di lavoro; infatti per differenza si trova, in questo caso che tale funzione è $n^s = 24 - \ell = 24 - [2 + (6/\omega)] = 2 - (6/\omega)$; tuttavia, anche n^s deve essere compresa tra 0 e 24; ora, n^s trovato sicuramente è più piccolo di 24 (infatti è pari a 2 ore meno qualcosa!), ma dobbiamo essere sicuri che sia anche maggiore di (o uguale a) zero. La condizione $n^s = 2 - (6/\omega) \geq 0$ equivale a richiedere $\omega \geq 3$. Se questa condizione è violata, si cade nella soluzione d'angolo n^s=0 (poiché l'ottimo matematico richiederebbe un tempo lavorato negativo,il che non ha senso).
In conclusione, la funzione di offerta di lavoro (dotata di senso economico) è la seguente:

$$n^s = \begin{cases} 0 & per\ 0 < \omega < 3 \\ 2 - (6/\omega) & per\ \omega \geq 3 \end{cases}$$

Si nota quanto segue: se il salario reale è più piccolo di 3, un suo eventuale incremento non porta a modificare l'offerta di lavoro (in altre parole, l'offerta di lavoro è inelastica al salario reale per tutti valori di salario reale minori di 3); se invece il salario reale è maggiore di 3, allora un suo incremento porta a variare l'offerta di lavoro, ed in particolare l'offerta di lavoro è crescente nel salario reale; ciò vuol dire che l'effetto di sostituzione prevale su quello di reddito. Si nota in ogni caso che la funzione di offerta di lavoro, pure sempre crescente, si approccia all'asintoto orizzontale n^s=2 quando il salario reale tende a valori molto alti (in termini più eleganti, $\lim_{\omega \to +\infty} n^s(\omega) = 2$); perciò possiamo anche dire che comunque questo individuo non troverà ottimale mai eccedere 2 ore di lavoro al giorno (qualunque sia il salario reale fronteggiato!).

Domande di riepilogo

1. Tracciate un vincolo di bilancio, nello spazio tempo libero – consumo , nel caso che il salario nominale non sia costante al variare delle ore lavorate, ma diventi più elevato dopo la ottava ora di lavoro al giorno. (Notate che questa richiesta corrisponde ad un dato molto verosimile: in molti Paesi, Italia compresa, la remunerazione unitaria del lavoro varia al variare delle ore lavorate: le ore di straordinario sono remunerate maggiormente).
2. Scrivete il vincolo di bilancio cui è soggetto un individuo nel caso che il

problema della scelta tra tempo libero e consumo venga affrontato potendo scegliere quanti giorni si lavora in un anno. Spiegate quale è, in questo caso, l’unità di misura che si adotta per il consumo.

3. Dopo avere spiegato che cosa si intende per “elasticità dell’offerta di lavoro al salario reale”, commentate la seguente affermazione, chiarendo se e essa è vera o falsa: “*E’ possibile che alcuni individui mostrino una funzione di offerta di lavoro con elasticità negativa al salario reale*”.
4. Consideriamo la scelta fra tempo libero e consumo e assumiamo che il tempo libero sia un bene inferiore. Quale peculiarità caratterizza, in questo caso, la funzione di offerta di lavoro? [*Suggerimento*: studiate bene, in questo caso, come si comportano l’effetto reddito e l’effetto sostituzione].
5. La seguente affermazione è vera o falsa? (Motivate): “*Se il tempo libero fosse un bene inferiore, allora la funzione di offerta di lavoro non potrebbe mai avere elasticità negativa al salario reale*”.

Esercizi di riepilogo

1. Le preferenze di un individuo tra ore di tempo libero al giorno e consumo giornaliero sono date dalla funzione $U(\ell,c)=2\sqrt{\ell}+\sqrt{c}$, cui corrisponde $SMS_{\ell,c}=2\sqrt{c}/\sqrt{\ell}$. (a) Determinate l’offerta di lavoro dell’individuo se il salario reale è pari a 6, ed egli non ha altra dotazione se non il reddito da lavoro. (b) Stabilite come si modifica l’offerta di lavoro se,oltre al reddito da lavoro, l’individuo può disporre di un reddito monetario pari, in termini reali, a 6 unità del bene di consumo.

2. Un individuo deve decidere quanti giorni lavorare in un mese. Le sue preferenze tra giorni di tempo libero al mese e consumo sono date dalla funzione $U(\ell,c)=\log(\ell-10)+\log(c)$. In corrispondenza vale: $SMS_{\ell,c}=c/(\ell-10)$. Il prezzo del bene di consumo è 5 e il salario giornaliero è 10. (a) Determinate l’offerta di lavoro dell’individuo e il suo livello ottimale di consumo.
   [*Risposta:* considerando il mese di trenta giorni, l’offerta di lavoro è pari a 10 giorni e il consumo è pari a 20].

3. Le preferenze di un individuo tra ore di tempo libero al giorno e consumo giornaliero sono date dalla funzione $U(\ell,c)=2\ell+9\log(c)$, cui corrisponde $SMS_{\ell,c}=2c/9$. (a) Determinate l’offerta di lavoro dell’individuo se il salario reale è pari a 0,5. (b) Stabilite se e come si modifica la scelta di offerta di lavoro se, per legge, non è possibile lavorare più di *z* ore al giorno (*z* è un parametro fissato dalla legge). [*Risposta:* (a) n^s=4,5]

4. Determinate la funzione di offerta di lavoro di un individuo con preferenze $U(\ell,c)=\ell+2c$ e che non abbia altri redditi se non quello da lavoro. [*Suggerimento:* notate che l'utilità marginale del tempo libero è costante e pari a 1, e anche l'utilità marginale del consumo è costante e pari a 2; pertanto, il saggio marginale di sostituzione è ...]

5. Un individuo può scegliere quante ore di tempo libero avere in un giorno, e poi può scegliere anche fra due panieri di consumo *x* ed *y*. Le sue preferenze sono descritte dalla funzione di utilità $U(\ell, c) = \ell \cdot x^2 \cdot y^3$; è agevole trovare che i saggi marginali di sostituzione, in questo caso, sono $SMS_{\ell,x} = x/(2\ell)$, $SMS_{\ell,y} = y/(3\ell)$, $SMS_{x,y} = 2y/(3x)$. Sapendo che il salario orario è 8 Euro, e i prezzi dei due beni sono rispettivamente p_x=6 e p_y=4, determinate la scelta ottimale dell'individuo.
[*Suggerimento e risposta*: per determinare la scelta ottimale, dovete risolvere un sistema di tre equazioni nelle tre incognite del problema in questione; l'ottimo è: *x*=32/3, y=24, *l*=4, e pertanto n^s=20].