Applicazioni della teoria della domanda: Consumo nel tempo e scelte di risparmio

Riferimento bibliografico: Dispensa - Capitolo 5_B
(scaricabile dalla piattaforma Studium o dal sito www.robertocellini.it)

Inoltre, esercizio tipo num. 7 – il testo è disponibile nel file degli esercizi tipo, e la risoluzione è filmata e disponibile sul sito di radiozammù.

Il caso

Immaginate di ricevere una remunerazione. E' verosimile che parte della remunerazione non la consumiate subito, ma la risparmiate.
Per quale motivo? …
Da che cosa dipende l'ammontare di risorse che decidete di risparmiare?
Immaginate che il tasso di interesse (che percepite, ad esempio, dalla banca presso la quale depositate il vostro risparmio, o da titoli nei quali impiegate il risparmio) aumenti. Trovereste ottimale risparmiare di più, oppure di meno, oppure pensate che l'ammontare da voi risparmiato rimarrebbe uguale? …

Introduzione

Finora abbiamo assunto che tutto il reddito venga speso per l'acquisto beni di consumo.
Ora prendere in considerazione il fatto che il consumo può avvenire in periodo diversi.

In questo caso, non sarà più necessariamente vero che in ogni periodo la spesa per consumo debba essere uguale al reddito: potrebbero esserci periodi nei quali il reddito è superiore alla spesa per consumo, e altri in cui il reddito è inferiore alla spesa effettuata.

Ciò vuol dire che vi saranno periodi nei quali si effettua un risparmio positivo e altri nei quali il risparmio è negativo.

Come sempre, un consumatore razionale (e *self-interested*) punterà a trovare la combinazione ottimale di consumo oggi e consumo domani (ossia, quella combinazione di consumi nel tempo che massimizza la sua personale utilità), subordinatamente ad un vincolo che esprime le possibilità di consumo.

Continueremo ad assumere che ciò che fornisce utilità al consumatore è il consumo:
(ossia, assumeremo che il risparmio di per sè non genera utilità).

Il consumatore può avere una certa disponibilità psicologica a cambiare consumo oggi con consumo domani (***preferenze: quanta impazienza?***).

Il mercato, d'altro lato consentirà di scambiare opportunità di consumo oggi contro opportunità di consumo domani (***vincolo di bilancio***).

Procederemo rappresentando:
- ✓ dapprima le preferenze di un consumatore,

e poi
- ✓ le sue possibilità.

La scelta ottimale sarà rappresentata, come sempre dal punto (combinazione di consumi nel tempo) ritenuto migliore [secondo le preferenze individuali], fra tutti quelli accessibili [dati i redditi e le configurazioni di prezzo; tra i prezzi figurerà anche il tasso di interesse].

Le preferenze individuali sul consumo nel tempo

Limitiamo la nostra attenzione, per ora, ad un consumatore che vive per due periodi (presente e futuro):
le sue preferenze sono descritte da una funzione di utilità:
$$U = U(c_p, c_f)$$
c_p= consumo presente
c_f= consumo futuro

Assumiamo che c_p e c_f siano entrambi *beni*:

dosi incrementali di c_p (a parità di tutto il resto) incrementano l'utilità,
dosi incrementali di c_f incrementano l'utilità;

⇨ ciò equivale a dire che le utilità marginali, di c_p, e c_f sono positive:

$$U'_{c_p} = \partial U / \partial c_p > 0 \, , \quad U'_{c_f} = \partial U / \partial c_f > 0 \; ;$$

E' anche usuale assumere che ciascuno dei due beni abbia
utilità marginale positiva ma decrescente:

Questo , analiticamente, vuol dire che le derivate seconde della funzione di utilità rispetto a di c_p, e c_f sono negative.

Dalla funzione di utilità deriva una famiglia di curve d'indifferenza.

(Come sempre, peraltro, è possibile descrivere i gusti del consumatore, relativamente alle combinazioni tra consumo oggi e domani, anche rappresentando direttamente la mappa di curve d'indifferenza , senza conoscere la funzione di utilità).

Lungo una data curva di indifferenza, giacciono tutte le combinazioni tra consumo presente e consumo futuro che forniscono al consumatore lo stesso livello di soddisfazione.

In relazione ad una data curva di indifferenza, si definisce **Saggio marginale di sostituzione tra consumo presente e consumo futuro** (o **Saggio marginale di sostituzione intertemporale**) la grandezza

$$SMS_{c_p, c_f} = SMSI = -U'_{c_p} / U'_{c_f} \; ;$$

essa è negativa, ma (come al solito) ne consideriamo il valore assoluto: $\left| SMS_{c_p, c_f} \right| = U'_{c_p} / U'_{c_f}$.

Il *SMSI* dice a quante unità di consumo futuro si è disposti a rinunciare, pur di avere una unità aggiuntiva di consumo presente e permanere sul medesimo livello di utilità (cioè sulla medesima curva d'indifferenza).

Quanto più questo saggio marginale di sostituzione è grande, tanto più "impaziente" è il consumatore in questione.

Definizione

Saggio Marginale di Sostituzione Intertemporale, $|SMSI| = |SMS_{c_p,c_f}| = U'_{c_p}/U'_{c_f}$ **:** *rappresenta l'ammontare di consumo del periodo futuro cui l'individuo è disposto a rinunciare, pur di avere una unità in più di consumo del periodo presente, e permanere sullo stesso livello di utilità.*

Tipicamente, $|SMSI|$ è decrescente in c_p ossia, quanto maggiore è già il consumo presente, tanto minore è l'ammontare di consumo futuro cui il consumatore è disposto a rinunciare per avere un'altra dose di consumo presente.

➔ Curva di indifferenza decrescente e convessa verso l'origine (vedi Fig. 1)

Se $|SMSI|$ fosse un numero costante, le curve di indifferenza sarebbero lineari;
Se $|SMSI|$ fosse crescente in c_p , le curve d'indifferenza sarebbero concave verso l 'origine.

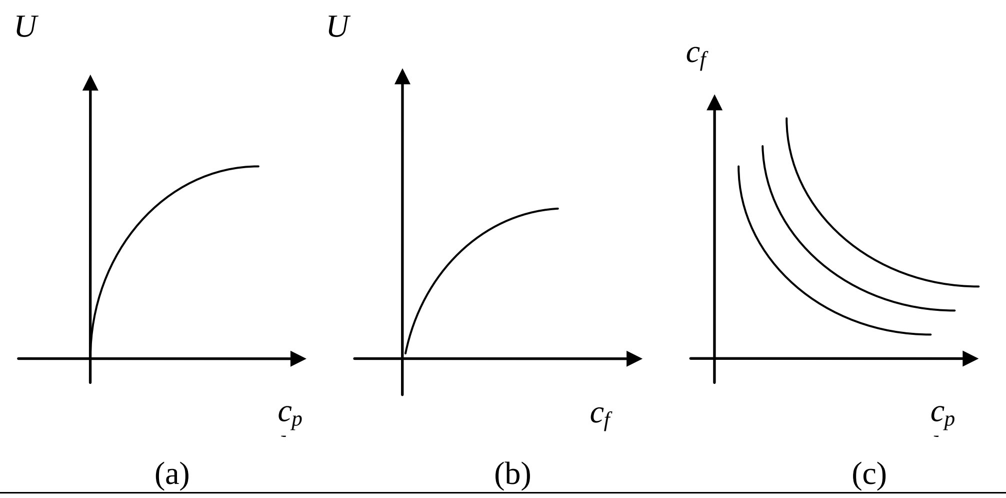


Figura 1 – Rappresentazioni delle preferenze del consumatore. Grafico (a): utilità in funzione del consumo presente (dato il consumo futuro); (b) utilità dipendente dal consumo futuro (per dato livello di consumo presente) e mappa delle curve di indifferenza.

Approfondimento

A volte, è possibile esprimere la funzione d'utilità nella forma:

$$U = U(c_p, c_f) = u(c_p) + \frac{1}{1+\rho} u(c_f)$$

dove $u(c)$ è detta utilità istantanea
ρ è detto saggio di sconto soggettivo (o tasso d'impazienza psicologico).

Il fattore $1/(1+\rho)$, infatti, è un numero minore di 1.
La stessa quantità di bene, se consumata nel periodo futuro, fornisce un'utilità minore (perché scontata) di quella che fornirebbe se consumata nel periodo presente.

Più alto è ρ, più impaziente è il consumatore, perché minore è l'utilità che gli deriva dal consumo nel periodo futuro.

NB: ρ è un parametro che rispecchia le preferenze individuali.
Ad esempio, se valesse $U = log(c_p)+(1/4)log(c_f)$, potremmo dire che $\rho=3$.
.

Il problema di scelta di risparmio si traduce in un problema di scelta delle quantità di consumo nel tempo, che massimizzano l' utilità individuale, sotto un vincolo di bilancio.

Una volta determinato il consumo ottimale, il risparmio ottimale si determina semplicemente per differenza:
la differenza tra il reddito del primo periodo, e la spesa per il consumo nel primo periodo = 'offerta di risparmio'.

Il vincolo di bilancio intertemporale

Premessa: relazioni tra grandezze nominali e reali nel corso del tempo

Il trascorrere del tempo è associato, nelle economie moderne, alla maturazioni di interessi. (Perché?)

Consideriamo una somma monetaria nel periodo presente A_p,

(non la si consuma ➔ nel periodo futuro questa somma sarà equivalente a se stessa, aumentata degli interessi.

Se la percentuale (tasso) di interesse è pari ad i, questo vuol dire che l'equivalente finanziario di A_p, nel periodo successivo sarà $A_f = A_p(1+i)$.

(Ad es., se depositata in banca all'ìnteresse i)

$A_f =$ valore capitalizzato futuro della somma presente A_p

Ovviamente possiamo di converso anche trovare il
valore presente (o valore attuale) di una somma futura:

$$A_p = \frac{1}{1+i} A_f$$

Attenzione!: Non è affatto detto che, nel periodo futuro la somma A_f (con $A_f = A_p\,(1+i)$) consenta di acquistare la stessa quantità di bene di consumo che si poteva acquistare con la somma A_p nel periodo presente: il valore reale delle somme monetarie, infatti, dipende dal livello dei prezzi nei due periodi

Indichiamo con p_p e p_f rispettivamente i prezzi del periodo presente e del periodo futuro.

Allora, il valore reale di A_p sarà $a_p = A_p / p_p$,
mentre il valore reale della somma A_f sarà $a_f = A_f / p_f$.

Ricordando che $A_f = A_p(1+i)$, possiamo anche scrivere:

$$a_f = \frac{A_f}{p_f} = \frac{A_p(1+i)}{p_f} = \frac{[a_p p_p](1+i)}{p_f} = a_p \frac{p_p(1+i)}{p_f}$$

Abbiamo così trovato l'**equivalente reale, nel periodo futuro, di una grandezza reale del primo periodo**.

Il fattore [$(1+i)\ p_p / p_f$] viene anche espresso come [$1+r$], dove r individua il **tasso d'interesse reale**.

Definizione

Attualizzazione: E' l'operazione che porta a esprimere il valore corrente di grandezze future; se riguarda grandezze nominali, il valore attuale (o valore presente), oggi, S_p, di una somma futura S_f è : $S_p = \frac{1}{1+i} \cdot S_f$, dove i indica il tasso di interesse nominale. Se l'attualizzazione viene fatta in riferimento a grandezze reali, il tasso di interesse da utilizzare è quello reale.

Definizione

Tasso di interesse reale. E' il tasso che consente di esprimere l'equivalenza tra due grandezze reali che hanno luogo in tempi diversi. Se il tasso d'interesse vigente tra un periodo presente e un periodo futuro è indicato da i, allora il tasso di interesse reale r sarà tale per cui

$$(1+r) = \frac{p_p(1+i)}{p_f}$$

Approssimativamente, il tasso di interesse reale è uguale alla differenza tra il tasso d'interesse nominale e il tasso di variazione dei prezzi (o tasso d'inflazione), $r \cong i - \text{tasso di variazione dei prezzi}$.

Se abbiamo a che fare con grandezze reali, l'equivalenza finanziaria nel tempo va valutata col tasso d'interesse reale.

Perciò, l'equivalente reale, nel periodo futuro, di una grandezza reale a_p oggi, sarà:

$$a_f = a_p \cdot (1+r);$$

il valore attuale reale di una grandezza futura sarà invece

$$a_p = a_f / (1+r).$$

L'espressione del vincolo di bilancio intertemporale

Scriveremo questo vincolo sia in termini monetari, sia in termini reali.

(poi, lo memorizzeremo solo in termini reali! – ma tutti i modi in cui lo scriveremo sono corretti)

Indichiamo con:
Y_p = il reddito monetario (o nominale) del periodo presente;
Y_f = il reddito monetario del periodo futuro;
in termini reali: corrispondono, rispettivamente, a
dotazione bene presente $y_p = Y_p / p_p$ unità di bene di consumo,
e dotazione y_f unità del bene futuro, con $y_f = Y_f / p_f$.

L'ammontare di risparmio nominale (del periodo presente) è
$S = Y_p - p_p c_p$,
in termini reali (di unità del bene): $s = y_p - c_p$.

Con questo risparmio effettuato nel periodo presente, incrementato con gli interessi, il consumatore potrà finanziare (unitamente col reddito futuro) il suo consumo futuro:

$$p_f \cdot c_f = Y_f + (Y_p - p_p \cdot c_p) \cdot (1+i)$$

Ossia:

$$p_f \cdot c_f = p_f \cdot y_f + (p_p \cdot y_p - p_p \cdot c_p) \cdot (1+i) = p_p (y_p - c_p)(1+i)$$

da cui:

$$c_f = y_f + \frac{1}{p_f} \cdot p_p (y_p - c_p) \cdot (1+i) = y_f + (y_p - c_p) \cdot (1+i) \frac{p_p}{p_f}$$

Ora, ricordiamo che $(1+r) = (1+i) \cdot p_p / p_f$. Perciò:

$$c_f = y_f + (y_p - c_p) \cdot (1+r)$$

Può succedere che il consumo futuro in termini reali, c_f, sia:

a) esattamente uguale a quello che riceve (in termini reali) nel periodo futuro, se $(y_p - c_p) = 0$, (e il risparmio è stato esattamente uguale a zero);
b) c_f, maggiore di quanto riceverà in dotazione nel periodo futuro, se $(y_p - c_p) > 0$ (il risparmio è stato positivo);
c) c_f, minore di quanto riceverà in dotazione nel periodo futuro, se $(y_p - c_p) < 0$; questa evenienza corrisponde al caso di un risparmio del periodo presente negativo

Altri modi:

$$c_f = -(1+r) \cdot c_p + (1+r) y_p + y_f$$

$$c_p + \frac{1}{1+r} c_f = y_p + \frac{1}{1+r} y_f$$

Eguaglianza delle somme (in valore attuale) di consumi e dotazioni

Nel caso particolare che Y_f=y_f=0, il vincolo naturalmente si riduce a:

$$c_p + \frac{1}{1+r} c_f = y_p$$

ossia: $c_f = -(1+r)c_p + (1+r)y_p$ o anche $c_f = (1+r)[y_p - c_p]$.

Rappresentazione grafica (nel grafico sui cui assi vengono misurati c_p e c_f)

Inclinazione: -(1+r): questo è il *saggio di trasformazione intertemporale* tra consumo presente e consumo futuro.
Intercetta orizzontale:
Intercetta verticale:

NB: Il punto di dotazione deve sempre fare parte del vincolo di bilancio.
Infatti, è sempre possibile che il consumatore consumi in ciascun periodo esattamente quanto riceve in quel periodo, senza esprimere risparmio, né accendere debito.

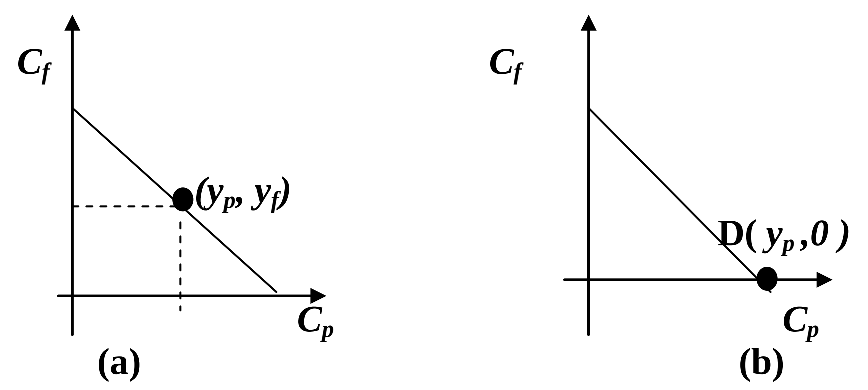


Figura 2. Vincolo di bilancio intertemporale e punto di dotazione.

E' importante sottolineare che il saggio di trasformazione esprime le ***possibilità date dal mercato*** (che hanno a che fare col sistema dei prezzi): rinunciando ad una unità di consumo oggi, il consumatore potrà avere, grazie al mercato, (1+*r*) unità di consumo domani.

Se le dotazioni sono positive in entrambi i periodi di tempo, il punto di dotazione avrà coordinate positive (pannello (a) della Figura 2),

mentre se la dotazione futura è zero, allora il punto di dotazione sarà un punto dell'asse orizzontale (pannello (b)).

Il tasso d'interesse reale è una grandezza di mercato, che il singolo consumatore percepisce come un dato esogeno;
non ha niente a che vedere col tasso di sconto psicologico!

Infine, se il tasso d'interesse attivo è differente da quello passivo, allora l'inclinazione del vincolo di bilancio sarà differente nella regione di risparmio positivo e nella regione di indebitamento;
tipicamente, il tasso passivo (per il consumatore) è più elevato di quello attivo, sicché il vincolo è così come nella figura 3.

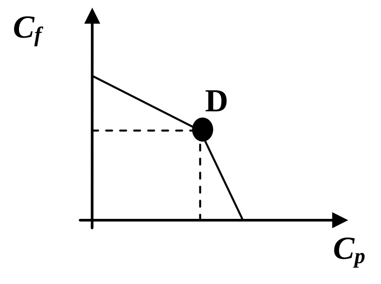


Figura 3. Vincolo di bilancio con differenti valori del tasso di interesse attivo e passivo.

L'ottimo del consumatore

Problema:

$$Max \quad U = U(c_p, c_f)$$

$$s.v.: \quad c_p + \frac{1}{1+r} c_f = y_p$$

La soluzione di ottimo è rappresentata dal punto del vincolo di bilancio che giace sulla curva d'indifferenza più elevata.

Se questo è un punto di tangenza, allora curva d' indifferenza e vincolo di bilancio hanno uguale inclinazione in corrispondenza del punto di ottimo.

Come già sappiamo, l'inclinazione del vincolo di bilancio è -(1 + *r*) ed essa rappresenta il "saggio di trasformazione" tra i due beni (consumo oggi e consumo domani).

L'inclinazione della curva d' indifferenza, invece, è il saggio marginale di sostituzione tra i due beni ed è data da $\left| SMS_{c_p, c_f} \right| = U'_{c_p} / U'_{c_f}$.

La condizione di tangenza risulta quindi:

$$\left| SMS_{c_p, c_f} \right| = (1+r)$$

Assieme al vincolo di bilancio, questa relazione dà luogo ad un sistema di due equazioni nelle due incognite c_p, c_f.

La risoluzione: sia la domanda di c_p sia quella di c_f, sono funzione della/e dotazione/i e del tasso di interesse reale.

Conseguentemente, anche l'ammontare ottimale di risparmio (ossia, l'offerta di risparmio) dipende da dotazione/i e da tasso d'interesse reale.

La figura 2: Punto di ottimo

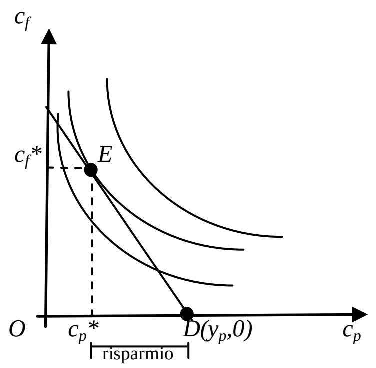


Figura 2. L'offerta di risparmio si trova per differenza. Il punto $D(y_p,0)$ rappresenta le dotazioni ricevute nell'arco della vita, il punto E la combinazione ottimale di consumo presente e consumo futuro, mentre y_p-c_p* è l'offerta (ottimale) di risparmio.

Si ricordi, tuttavia, che la tangenza geometrica tra vincolo di bilancio e curva di indifferenza, come sempre nelle scelte di consumo, non è condizione nè necessaria, nè sufficiente per individuare un ottimo.

Vedremo nel paragrafo 6 casi di ottimo che non sono punti di tangenza (e potremmo rappresentare punti di tangenza che non sono soluzioni ottimali).

Esempio

Consideriamo un consumatore con vita bi-periodale, funzione di utilità $U = \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}$ (dove c_1 e c_2 indicano il consumo presente e il consumo futuro), che riceve in dotazione soltanto 10 unità del bene di consumo del periodo presente.
Determiniamo l'offerta di risparmio se il tasso di interesse reale è r=3%

Il problema del consumatore è quello massimizzare la funzione di utilità assegnata, sotto un vincolo di bilancio.

Il vincolo di bilancio, sarà del tipo: $c_1 + \frac{1}{1+r} c_2 = dotazione$.

Tenere presente che r=3% significa, in valore algebrico r=0,03
e considerando che la dotazione è, nel caso specifico, pari a 10,
il problema può essere, nello specifico scritto come:

$$Max \quad U = U(c_1\ , c_2) = \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}$$

$$s.v.: \quad c_1 + \frac{1}{1{,}03} c_2 = 10 \quad ossia: \quad c_2 = 1{,}03 \cdot (10 - c_1)$$

Partiamo considerando il **punto di tangenza** tra curva d'indifferenza e vincolo di bilancio.
Il saggio marginale di sostituzione intertemporale, in questo caso, è

$$|SMSI| = \frac{U'_{c_1}}{U'_{c_2}} = \frac{1/(2\sqrt{c_1})}{1/(2\sqrt{c_2})} = \sqrt{c_2} / \sqrt{c_1}$$

La condizione di tangenza richiede quindi che:

$$|SMSI| = (1+r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}} = 1{,}03$$

Questa equazione va considerata, in sistema, congiuntamente con il vincolo di bilancio.

Risolvendo il sistema …
(…elevare al quadrato entrambi i membri della prima equazione, e poi ricavare c_2, che va sostituito nel vincolo di bilancio) si trova:

c_1^*=10/2,03=4,926; c_2^*=5,902.

L'ammontare del risparmio si trova quindi per differenza, ed è è quindi $s = 10 - c_1^* = 10 - 4{,}926 = 5{,}073$.

In termini discorsivi, delle 10 unità ricevute dal consumatore nel primo periodo, egli trova ottimale consumarne subito 4,926; ne risparmia quindi 5,073 che consentiranno, grazie al rendimento reale, ci potere consumare, nel periodo successivo c_2^*=5,902.

Esercizio di autoverifica

Si consideri un consumatore con vita bi-periodale, funzione di utilità $U = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$ (dove c_1 e c_2 indicano il consumo presente e il consumo futuro), a cui corrisponde SMSI=c_2/c_1 che riceve in dotazione soltanto 50 unità del bene di consumo del periodo presente. Determinare l'offerta di risparmio se il tasso di interesse reale è r=10%.
(Si tenga presente che r=10% è equivalente a scrivere r=0,1 e perciò in questo caso vale (1+r)= 1,1).

Effetti di variazione dei parametri sull'offerta di risparmio

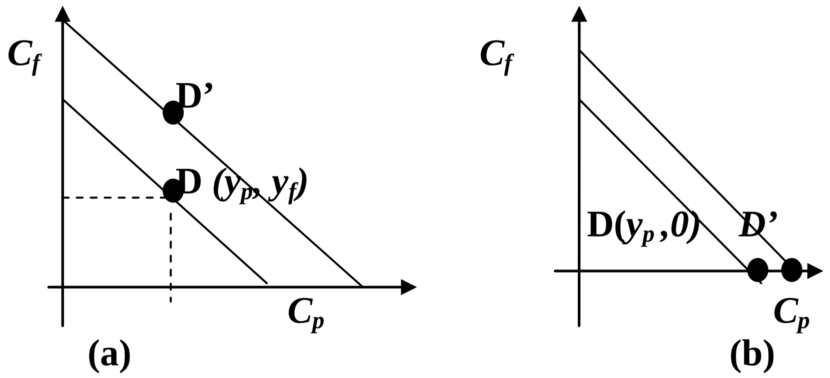
Effetti di VARIAZIONE DELLA DOTAZIONE (O DELLE DOTAZIONI), CIOE' DEI REDDITI

Il modo in cui variazioni della dotazione si ripercuotono sul risparmio dipende dalla forma della funzione di utilità e dalla natura del bene di consumo:

(Se c_p, fosse un bene inferiore, ad esempio, all'aumentare del reddito, la domanda ottimale di consumo presente, c_p^*, diminuirebbe ed il risparmio crescerebbe sicuramente.

(Se c_p è un bene normale, un aumento di y determina un aumento di c_p^*, e la variazione del risparmio (in positivo o in negativo) dipende dalla dimensione del cambiamento di c_p e di y_p .

Se cambia la dotazione , ma non cambia il tasso di interesse, il vincolo si sposta in modo parallelo.



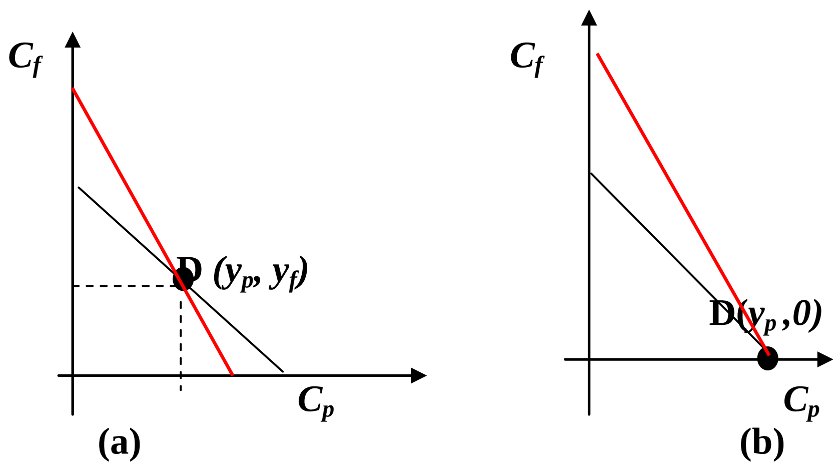
Effetti di VARIAZIONE DEL TASSI DI INTERESSE (REALE)

Una variazione dei tasso d'interesse (reale) corrisponde ad una variazione del prezzo relativo dei due beni:
Ricordo:

$$(1+r) = \frac{p_p(1+i)}{p_f}$$

(un aumento di *r* equivale ad un aumento di prezzo del bene del periodo presente rispetto al prezzo del bene del periodo futuro).

Se aumenta *r*, aumenta l'inclinazione (in valore assoluto), ossia aumenta la pendenza del vincolo:



Curiosità: ***In verità,***

Per chi ha un **risparmio positivo**, l'aumento del tasso di interesse comporta un effetto reddito **espansivo**
(si sente più ricco, chi ha un risparmio, se aumenta *r*!)

Per chi è **indebitato**, l'aumento del tasso di interesse comporta un effetto reddito **restrittivo**
(diventa più povero: deve impiegare più risorse per pagare gli interessi sul debito!)

Nel proseguo: assumiamo di avere a che fare con risparmiatori, non con soggetti indebitati, sicché l'aumento del tasso di interesse si configura come uno shock di reddito positivo

Come al solito, la variazione dei prezzi mette in moto processi di riallocazione dei consumi ottimali.

Una variazione di r, --poniamo un aumento-- comporta:

i) un **effetto sostituzione**: dato il maggiore costo di c_p, conviene sostituire il c_p con il bene c_f; la diminuzione della domanda di c_p, determina, ceteris paribus, un ***aumento dell' offerta di risparmio***;

ii) un **effetto reddito**: il prezzo del bene del periodo presente di cui si è dotati è aumentato, quindi si è più ricchi (*se si è ricevuto reddito soltanto nel primo periodo, e quindi si è risparmiatori*).
L'aumento del reddito reale disponibile determina un ***aumento di domanda di entrambi i beni di consumo*** (normali), in particolare di c_p^*, e quindi diminuisce il risparmio offerto.

Mentre effetto reddito ed effetto sostituzione agiscono nello stesso senso su c_f, (che aumenta all'aumentare di r), gli effetti su c_p^*, (e quindi sull'offerta di risparmio) sono di segno opposto.

L'effetto reddito tende a fare diminuire il risparmio ottimale, mentre l'effetto di sostituzione tende a farlo aumentare.

Perciò,

- ✓ se all'aumentare di r, risulta aumentare anche il risparmio offerto, vuol dire che ha prevalso l'effetto di sostituzione;

- ✓ se un aumento di r determina una diminuzione del risparmio vuol dire che ha prevalso l'effetto di reddito;

- ✓ e il risparmio rimane costante in seguito a variazioni di r, vuol dire che gli effetti di sostituzione e di reddito si sono compensati esattamente.

Può anche succedere che in alcune regioni dei parametri prevalga l'effetto di sostituzione, mentre in altre prevale l'effetto di reddito
(il risparmio presenta andamenti non monotonici rispetto al tasso di interesse).

La funzione che lega l'offerta del risparmio al tasso d'interesse prende il nome di *funzione di offerta di risparmio*.

Definizione

Funzione di offerta di risparmio

La funzione di offerta di risparmio è una funzione che lega l'offerta di risparmio al tasso d'interesse reale.

E' pertanto una funzione del tipo $s^O=s(r)$.

Essa può avere andamento crescente, oppure decrescente, oppure costante; può anche essere non monotonica.

La funzione di offerta di risparmio

Ripetiamo con altre parole:

Quando cambia il tasso d'interesse, cambiano i consumi ottimali e quindi cambia l'offerta di risparmio.

L'offerta di risparmio si trova, semplicemente, sottraendo la spesa per consumo corrente al reddito corrente (se si ragiona con grandezze nominali), ovvero, sottraendo il consumo corrente alla dotazione reale corrente (se si ragiona in termini di grandezze reali).

La funzione di offerta di risparmio, s^O=*s(r)* può essere sia crescente sia decrescente, sia costante, sia avere andamento non monotonico.

Nel caso di dotazioni ricevute soltanto nel primo periodo di vita, e di beni normali:

- la funzione sarà crescente se l'effetto di sostituzione prevale sull'effetto di reddito,
- l'offerta di risparmio sarà funzione decrescente del tasso d'interesse se l'effetto di reddito prevale su quello di sostituzione;
- infine, una funzione di offerta di risparmio costante (ossia, inelastica al tasso d'interesse) è associata a un caso nel quale variazioni del tasso d'interesse comportano un effetto reddito ed uno di sostituzione che si neutralizzano a vicenda.

Vedi Figura 4: (Che cosa succede / può succedere allorché aumenta il tasso di interesse reale)

(Implicazione grafica, di un aumento del tasso di interesse reale: Vincolo di bilancio più ripido, facendo perno nel punto di dotazione)

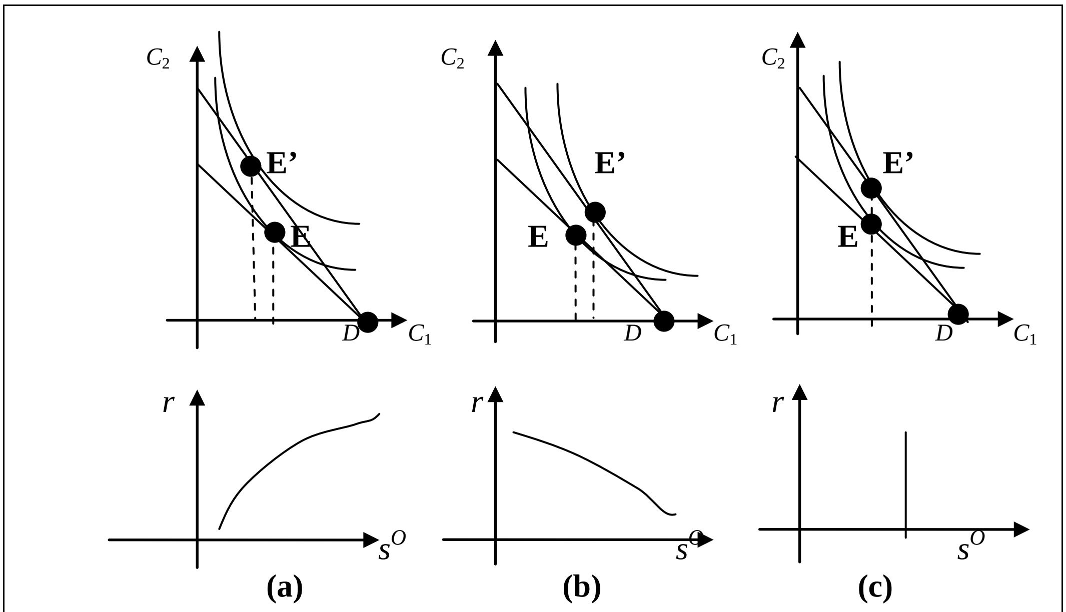


Figura 4. Rappresentazioni di possibili funzioni di offerta di risparmio: nel caso (a) l'effetto di sostituzione prevale su quello di reddito; nel caso (b) è prevalente l'effetto di reddito, mentre nel caso (c) i due effetti si compensano a vicenda.

I tre casi rappresentati in Fig. 4 corrispondo alle possibilità teoriche.

Rilevazioni statistiche suggeriscono che la forma più verosimile di funzione di offerta di risparmio è quella con andamento crescente (come nel grafico (a)).

In generale, nei grafici di offerta di risparmio:

(i) È possibile che il risparmio assuma valori negativi: questo corrisponde al caso di indebitamento, (il consumo corrente supera il reddito corrente; l'indebitamento verrà ripagato con redditi futuri).

(ii) E' possibile che il tasso di interesse reale assuma valori negativi: in particolare, questo accade quando il tasso di interesse nominale è più basso del tasso di inflazione
(Però, non sono possibili valori più bassi di -100%, ovvero più bassi di -1: infatti, *r*=-1 starebbe a significare che tutto l'ammontare reale risparmiato viene "bruciato" (e non è pensabile una situazione ancora peggiore);
➔ il campo di esistenza della variabile *r* è $r \geq -1$.

Esempio

Consideriamo un consumatore con vita bi-periodale, funzione di utilità $U = 2(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})$ (dove c_1 e c_2 indicano il consumo presente e il consumo futuro), che riceve in dotazione soltanto 10 unità del bene di consumo del periodo presente. Determiniamo la funzione di offerta di risparmio.

Il problema affrontato dal consumatore è il seguente:

$$Max \quad U = U(c_1, c_2) = 2(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})$$

$$s.v.: \quad c_1 + \frac{1}{1+r}c_2 = 10 \quad ossia: \quad c_2 = -(1+r)c_1 + 10 \cdot (1+r)$$

Partiamo considerando il punto di tangenza tra curva d'indifferenza e vincolo di bilancio.
Il saggio marginale di sostituzione intertemporale, in questo caso, è

$$|SMSI| = \frac{U'_{c_1}}{U'_{c_2}} = \sqrt{c_2} / \sqrt{c_1}$$

(Non deve sorprendere che SMSI sia il medesimo del precedente

Esempio considerato: infatti, la funzione di utilità è una sua trasformazione monotonica, per cui il SMS è il medesimo!

Volendo trovare la <u>funzione di offerta di risparmio</u>, il tasso di interesse reale, r , deve essere lasciato indicato parametricamente, proprio perché vogliamo trovare quale è l'ammontare ottimale di risparmio al variare del tasso di interesse.
La condizione di tangenza richiede:

$$|SMSI| = (1+r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}} = 1+r$$

E questa equazione va considerata, in sistema, congiuntamente con il vincolo di bilancio.

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}} = 1+r \\ c_2 = -(1+r)c_1 + 10 \cdot (1+r) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{c_2}{c_1} = (1+r)^2 \\ c_2 = -(1+r)c_1 + 10 \cdot (1+r) \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = (1+r)^2 \cdot c_1 \\ c_2 = idem \end{cases} \qquad \ldots$$

$$per\ confronto: \quad \begin{cases} (1+r)^2 \cdot c_1 = -(1+r)c_1 + 10 \cdot (1+r) \\ c_2 = idem \end{cases}$$

Si ottiene:

$$c_1{*} = \frac{10}{2+r} \quad ; \quad c_2{*} = \ldots$$

L'offerta di risparmio si trova per differenza, ed è quindi

$$s^O = 10 - c_1{*} = 10 - \frac{10}{2+r} = \frac{10+10r}{2+r}$$

Lasciamo al lettore studiare compiutamente questa funzione.

Per ogni $r \geq -1$, tale funzione è strettamente crescente:

➔ via via che il tasso di interesse di mercato aumenta, questo consumatore è portato a risparmiare sempre di più:

➔ modifiche del tasso di interesse innescano un effetto sostituzione che prevale sempre sull'effetto di reddito.

(Si noti anche che in ogni caso, il limite dell'offerta di risparmio, per *r* che tende a più infinito vale 10: per tassi di interesse altissimi, il risparmio, in ogni caso, non può mai essere superiore a 10, che è la dotazione ricevuta nel primo periodo!)

Esercizio di autoverifica

(Vedi dispensa)

Discussione della soluzione di ottimo consumo intertemporale

La risoluzione del problema intertemporale di ottimo deve portare a valori non privi di senso economico.

In particolare, sia c_p, sia c_f, debbono essere numeri non negativi.

In caso contrario, la migliore allocazione raggiungibile è in corrispondenza di soluzioni d'angolo.

Figure seguenti: i punti T, di tangenza geometrica, non hanno significato economico e pertanto, i punti di ottimo saranno quelli del vincolo di bilancio compatibili con la più elevata possibile curva di indifferenza

(Caso (a) : offerta di risparmio NULLA)
(Caso (b): offerta di risparmio positiva, pari all'intero ammontare D)

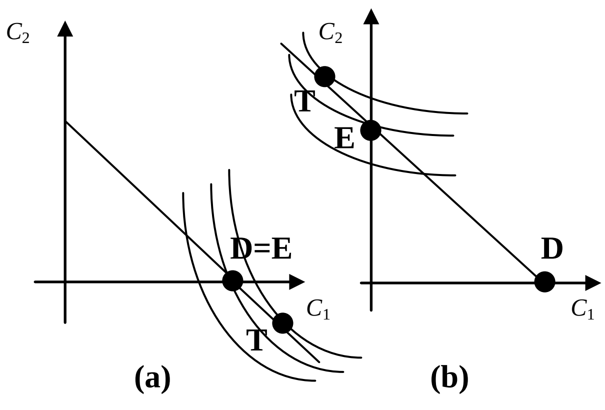


Figura 5. Soluzioni d'angolo. In entrambi i grafici, il punto *T* rappresenta il punto di tangenza tra una curva di indifferenza e la retta di bilancio; tali punti *T* però non hanno significato economico perché implicherebbero (in entrambi i casi) una quantità di consumo negativo (in un caso c_2, nell'altro c_1). Il punto con significato economico, appartenente al vincolo di bilancio e alla più elevata possibile curva di indifferenza (cioè, il punto di ottimo del consumatore) è allora quello denotato, in entrambi i grafici, con *E*.

Altri casi
con preferenze non standard
(preferenze lineari)
e punti di ottimo che *non sono* punti di tangenza

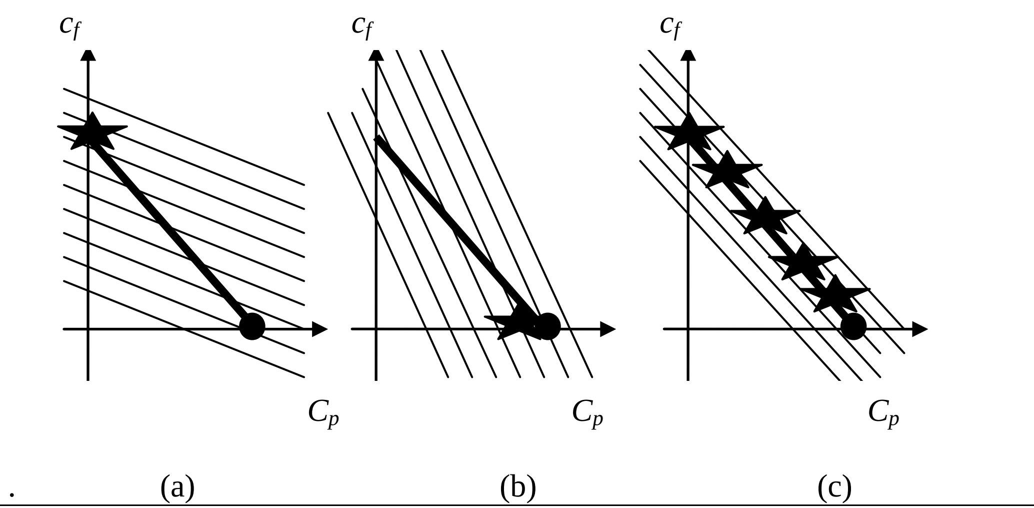


Figura 6. La scelta ottimale tra consumo presente e futuro,quando i due beni sono perfetti sostituti. Il vincolo di bilancio, in grassetto, ha inclinazione –(1+*r*). Il punto di dotazione è indicato dal cerchietto, mentre i punti ottimali sono rappresentati dalla stelletta.

Situazioni che si possono verificare
quando il tasso d'interesse attivo è diverso da quello passivo

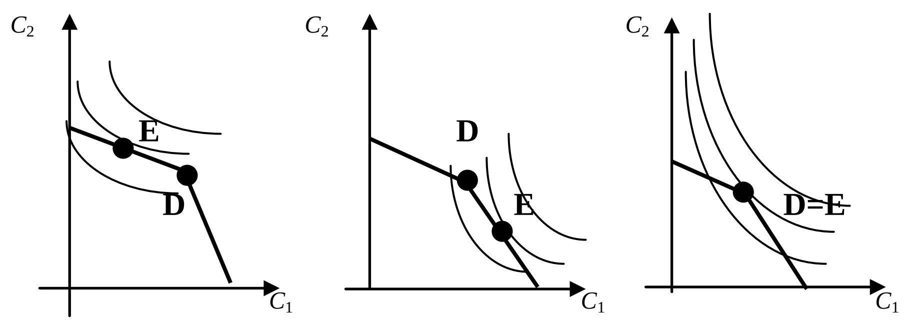


Figura 7. Scelte ottimali, quando i tassi di interesse attivo e passivo sono differenti. Con *D* si indica il punto di dotazione, e con *E* il punto di equilibrio per il consumatore.

Generalizzazione del modello a *N* periodi

Per semplicità, abbiamo finora considerato consumatori con vita bi-periodale (periodo presente e periodo futuro).

E' però semplice scrivere il problema di scelta nel caso che si rappresenti la vita di un individuo come costituita da *N* periodi, oltre al periodo presente.

Il consumatore razionale *self-interested* vorrà massimizzare una funzione di utilità i cui argomenti sono i livelli di consumo in ciascuno dei periodi, sotto un vincolo di bilancio che imporrà che la somma dei consumi, in valore attuale, debba essere uguale alla somma dei redditi (o delle dotazioni), sempre considerate in valore attuale:

$$Max \quad U = U(c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_N)$$

$$s.v.: \quad c_0 + \frac{1}{1+r}\cdot c_1 + \frac{1}{(1+r)^2}\cdot c_2 + \dots + \frac{1}{(1+r)^N}\cdot c_N = y_0 + \frac{1}{1+r}\cdot y_1 + \frac{1}{(1+r)^2}\cdot y_2 + \dots + \frac{1}{(1+r)^N}\cdot y_N$$

Risolvendo questo problema di massimo vincolato, il consumatore sceglierà il profilo ottimale dei consumi, (c_0*,c_1*,…, c_N*);
poi per differenza tra la dotazione ricevuta e i consumi effettuati in ciascun periodo si potrà calcolare il risparmio (di ciascun periodo).

L'accumulazione dei risparmi dà luogo alla ricchezza; questa sarà una ricchezza propriamente detta, se nel tempo si sono succeduti risparmi positivi, mentre sarà un debito –o "ricchezza negativa" – se si sono succeduti nel tempo risparmi negativi, che dovranno essere ripagati consumando in futuro meno del reddito che si riceverà.

Vedi:
Nella Dispensa: domande ed esercizi di riepilogo
Sul sito www.zammumedia.it : Esercizio tipo Num. 7.