Lezioni di TEORIA DEI GIOCHI

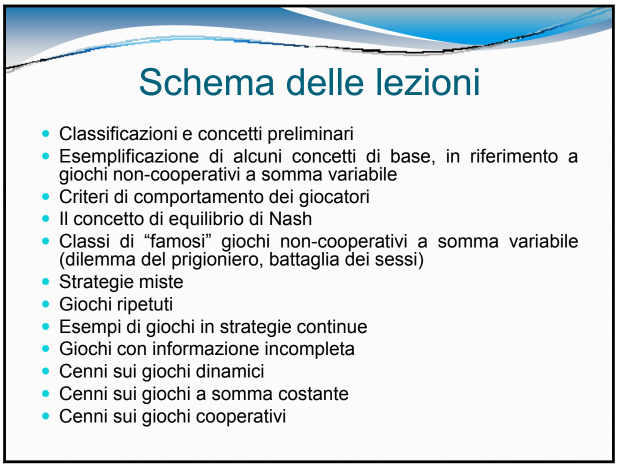
Roberto CELLINI

Professore Ordinario di Economia Politica
Facoltà di Economia, Università di Catania
cellini@unict.it

Riferimenti bibliografici

- Cellini R., Lambertini L., *Una guida alla teoria dei giochi*, CLUEB, Bologna, 1995 (II ed.)
- Gibbons R., *Teoria dei giochi*, il Mulino, Bologna, 1991
- Tirole J. *Organizzazione Industriale*, il Mulino, Bologna, 1994 (Appendice 1A)
- Kreps D., *Corso di microeconomia*, il Mulino, Bologna, 1990

Sulla vita di John Nash:
- Nadir S., *Il genio dei numeri*, Rizzoli, Milano, 1998



Schema delle lezioni

- Classificazioni e concetti preliminari
- Esemplificazione di alcuni concetti di base, in riferimento a giochi non-cooperativi a somma variabile
- Criteri di comportamento dei giocatori
- Il concetto di equilibrio di Nash
- Classi di “famosi” giochi non-cooperativi a somma variabile (dilemma del prigioniero, battaglia dei sessi)
- Strategie miste
- Giochi ripetuti
- Esempi di giochi in strategie continue
- Giochi con informazione incompleta
- Cenni sui giochi dinamici
- Cenni sui giochi a somma costante
- Cenni sui giochi cooperativi

Parte 1

Concetti introduttivi e classificazione dei giochi

Concetti preliminari: ESTERNALITA'

- Si definisce ESTERNALITA' ogni situazione in cui l'azione di un individuo ha effetto sul risultato conseguito da altri individui.
- Le ESTERNALITA' possono essere di segno positivo o negativo (e riguardare decisioni di consumo oppure decisioni di produzione).
- Le ESTERNALITA' possono essere RECIPROCHE

  (il comportamento dell'individuo A ha effetti sul benessere dell'individuo B ,

  e al tempo stesso il comportamento di B ha effetto sul benessere di A).
- …Quando ci sono ESTERNALITA' RECIPROCHE …

ESTERNALITA' RECIPROCHE

$$U_i = U_i(x_i, x_j)$$

$$U_j = U_j(x_j, x_i)$$

- Esternalità reciproche danno luogo a INTERDIPENDENZA STRATEGICA

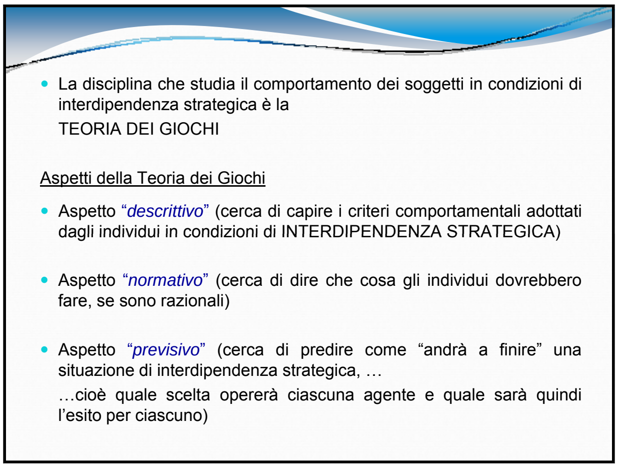
  (L'ottimo per *i* dipende da ciò che fa *j*

  (L'ottimo per *j* dipende da ciò che fa *i*

$$x_i{*} = F(x_j)$$

$$x_j{*} = G(x_i)$$

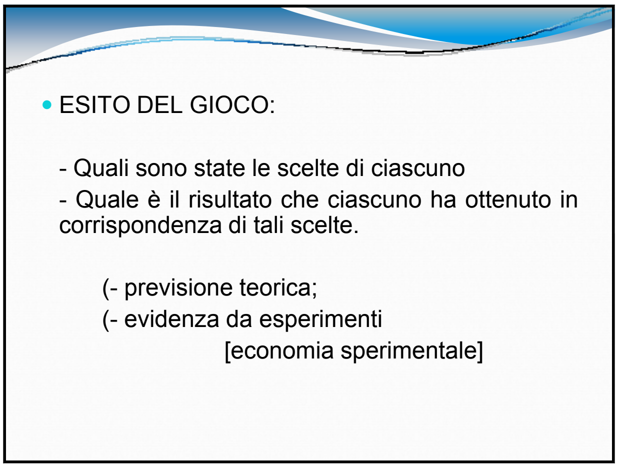
Funzioni di reazione
o
Funzioni di risposta ottima



- La disciplina che studia il comportamento dei soggetti in condizioni di interdipendenza strategica è la
  TEORIA DEI GIOCHI

Aspetti della Teoria dei Giochi

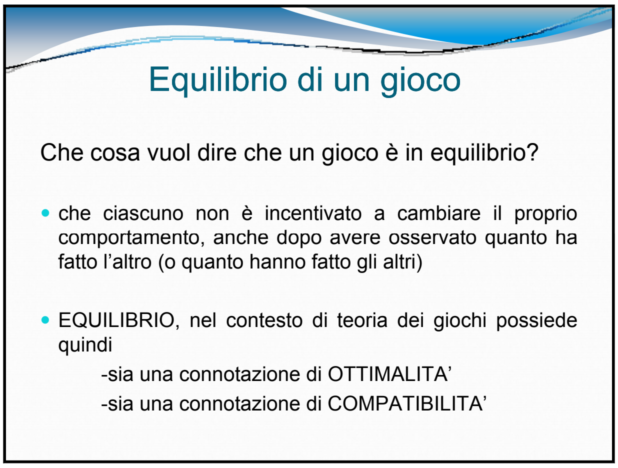
- Aspetto "*descrittivo*" (cerca di capire i criteri comportamentali adottati dagli individui in condizioni di INTERDIPENDENZA STRATEGICA)
- Aspetto "*normativo*" (cerca di dire che cosa gli individui dovrebbero fare, se sono razionali)
- Aspetto "*previsivo*" (cerca di predire come "andrà a finire" una situazione di interdipendenza strategica, …
  …cioè quale scelta opererà ciascuna agente e quale sarà quindi l'esito per ciascuno)



- ESITO DEL GIOCO:

  - Quali sono state le scelte di ciascuno
  - Quale è il risultato che ciascuno ha ottenuto in corrispondenza di tali scelte.

  (- previsione teorica;
  (- evidenza da esperimenti
  [economia sperimentale]



Equilibrio di un gioco

Che cosa vuol dire che un gioco è in equilibrio?

- che ciascuno non è incentivato a cambiare il proprio comportamento, anche dopo avere osservato quanto ha fatto l'altro (o quanto hanno fatto gli altri)
- EQUILIBRIO, nel contesto di teoria dei giochi possiede quindi
  -sia una connotazione di OTTIMALITA'
  -sia una connotazione di COMPATIBILITA'

ELEMENTI CARATTERISTICI DI UN GIOCO (CLASSIFICAZIONE DEI GIOCHI)

- Giocatori (A,B, …I … N)
- Azioni o mosse di ciascun giocatore

  A: (a_1, a_2 , …a_J, …a_M); B: (b_1, b_2 , …b_J, …a_K)
- Strategia

  (Regola di comportamento;

  (talvolta, sinonimo di mossa
- Risultato (o payoff) di ciascun giocatore

  (il risultato per ciascuno dipende dalle scelte di tutti: di egli stesso E di tutti gli altri)

  N.B.: ciascun giocatore NON *sceglie* il risultato cui vuole arrivare: può solo scegliere la mossa da fare e il risultato che otterrà dipenderà da ciò che ha fatto lui stesso e da ciò che hanno fatto gli altri

ELEMENTI CARATTERISTICI DI UN GIOCO (continua)

- Natura del gioco
  - cooperativa (= sono ammissibili accordi vincolanti tra i giocatori)
  - non-cooperativa (= non sono ammissibili accordi vincolanti tra giocatori)

    * *a somma variabile*

    (la dimensione della torta non è un dato costante, ma dipende essa stessa dalle scelte dei giocatori)

    * *a somma costante*

    (la dimensione della torta è data;

    la situazione è intrinsecamente conflittuali)

ELEMENTI CARATTERISTICI DI UN GIOCO (continua)

- Dimensione temporale

  - statici (one-shot)

    … simultanei

    … sequenziali

  - statici ripetuti

  - dinamici

    … in tempo discreto

    … in tempo continuo (giochi differenziali)

ELEMENTI CARATTERISTICI DI UN GIOCO (continua)

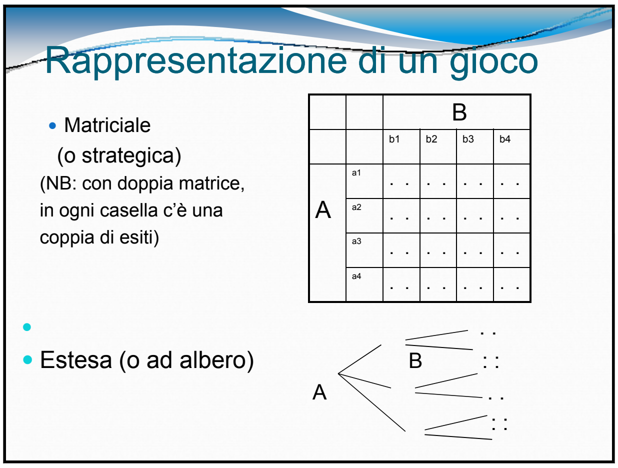
- Informazione

  - completa
  - incompleta (simmetrica o asimmetrica)

  … … tutti gli elementi sono conosciuti da tutti i giocatori

  - perfetta
  - imperfetta

  ……tutta la storia passata è conosciuta da tutti i giocatori

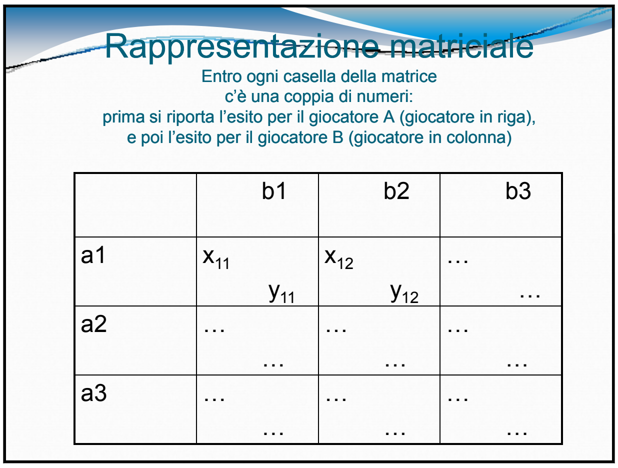


Rappresentazione di un gioco

- Matriciale
  (o strategica)
  (NB: con doppia matrice, in ogni casella c'è una coppia di esiti)

		B			
		b1	b2	b3	b4
A	a1	. .	. .	. .	. .
	a2	. .	. .	. .	. .
	a3	. .	. .	. .	. .
	a4	. .	. .	. .	. .

- Estesa (o ad albero)



Rappresentazione matriciale

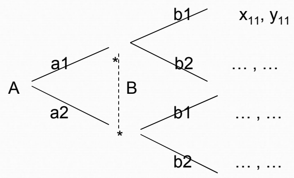
Entro ogni casella della matrice
c'è una coppia di numeri:
prima si riporta l'esito per il giocatore A (giocatore in riga),
e poi l'esito per il giocatore B (giocatore in colonna)

	b1	b2	b3
a1	x_{11} y_{11}	x_{12} y_{12}	… …
a2	… …	… …	… …
a3	… …	… …	… …

Rappresentazione estesa

(Alla fine dell'albero compaiono i vettori dei guadagni,
uno per ogni giocatore
nell'ordine in cui i giocatori sono riportati)

- Se il gioco è sequenziale, e le mosse precedenti sono osservabili, allora ogni giocatore, quando deve decidere, sa in che nodo si trova
- In caso contrario, il set informativo sarà rappresentato da un insieme di nodi (e il giocatore non sa su quale effettivamente egli si trova)



Esempio di gioco, (detto 2X2)

due giocatori,
ciascuno dei quali con due mosse a disposizione

		B	
		b1	b2
A	a1	2 5	7 9
	a2	-3 5	3 -6

- La teoria dei giochi cerca di studiare quali criteri di comportamento seguono agenti razionali impegnati in situzioni di interdipendenza strategica.
- Razionali = Perseguono il massimo per sè (*self-interested*)
- Prima di illustrarli, procederemo ad alcuni "esperimenti", in cui vi sarà richiesto di mettervi nei panni di uno specifico giocatore.
- E' importante che questi esperimenti siano svolti prima di illustrare le regole che la teoria dei giochi ritiene "ragionevoli"
- Vedremo poi se le risposte da voi date sono "ragionevoli"
(se sì, OK; se no: o non siete razionali o la teoria non spiega bene il comportamento individuale)

Parte 2

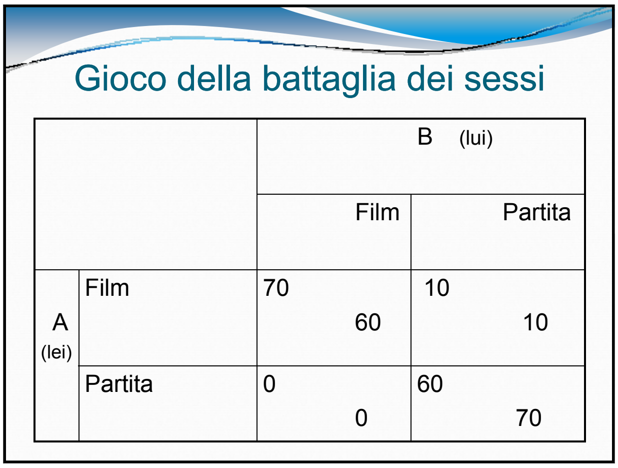
Esempi di giochi

Gioco dell'incendio

		B	
		SI spallata	NO spallata
A	SI spallata	+2 +2	-3 -1
	NO spallata	-1 -3	-1 -1

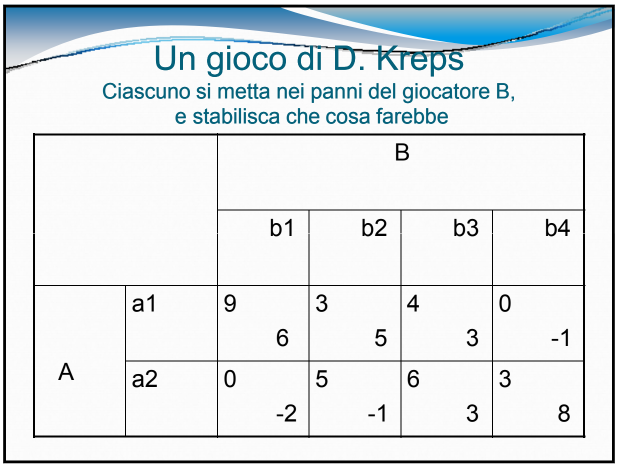
Gioco del dilemma del prigioniero

		B	
		Confessa	Non confessa
A	Confessa	-4 -4	+3 -9
	Non confessa	-9 +3	0 0



Gioco della battaglia dei sessi

		B (lui)	
		Film	Partita
A (lei)	Film	70 60	10 10
	Partita	0 0	60 70



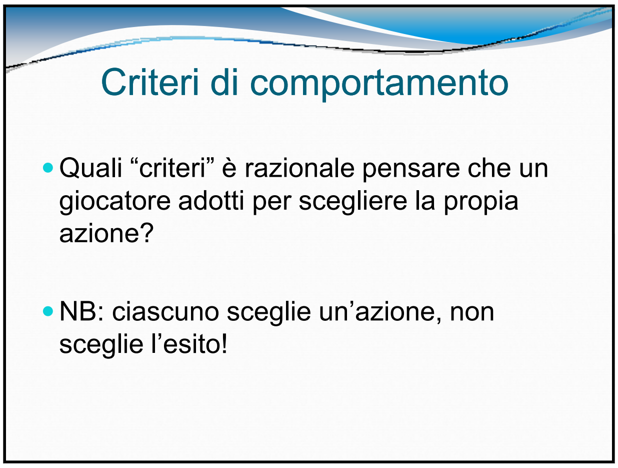
Un gioco di D. Kreps

Ciascuno si metta nei panni del giocatore B,
e stabilisca che cosa farebbe

		B			
		b1	b2	b3	b4
A	a1	9 6	3 5	4 3	0 -1
	a2	0 -2	5 -1	6 3	3 8

Parte 3

Criteri di comportamento



Criteri di comportamento

- Quali "criteri" è razionale pensare che un giocatore adotti per scegliere la propia azione?
- NB: ciascuno sceglie un'azione, non sceglie l'esito!

La dominanza

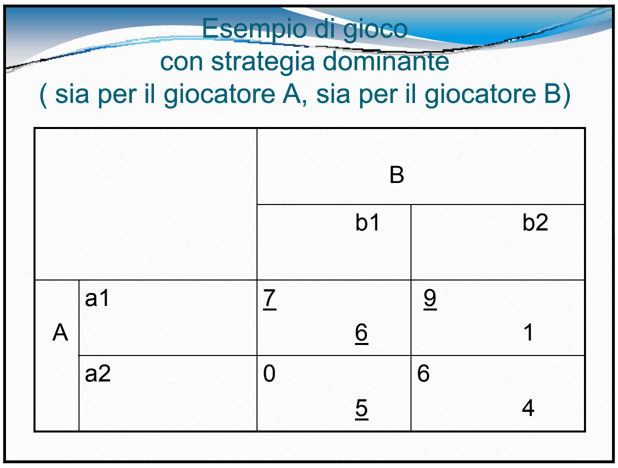
Una mossa si dice **dominante** se essa rappresenta la migliore risposta che un giocatore possa dare, qualunque sia la scelta dell'avversario.

Nella maggior parte dei casi, i giocatori non possiedono mosse dominanti, (purtroppo… per loro!),

ma …

è logico affermare che se un giocatore possedesse una mossa dominante, allora sicuramente la sceglierebbe

CRITERIO DELLA DOMINANZA: un giocatore razionale sceglie la propria mossa dominante, posto che tale mossa dominante esista



Esempio di gioco con strategia dominante (sia per il giocatore A, sia per il giocatore B)

		B	
		b1	b2
A	a1	7 6	9 1
	a2	0 5	6 4

Esempio di gioco con strategia dominante (per il giocatore A, ma non per il giocatore B)

		B	
		b1	b2
A	a1	5 6	8 1
	a2	8 0	9 4

Esempio di gioco con strategia debolmente dominante (a1 per il giocatore A)

		B	
		b1	b2
A	a1	7 6	9 8
	a2	7 5	6 4

La dominanza: mossa dominata

Una mossa si dice **dominata** se essa non rappresenta MAI la migliore risposta che un giocatore possa dare, per ogni possibile scelta dell'avversario.

Se un giocatore dispone soltanto di due mosse, se una è dominante, l'altra è necessariamente dominata.

Se un giocatore possiede più di due mosse, potrebbe esistere una strategia dominata, ma nessuna strategia dominante.

Si potrebbe pensare (e in realtà viene assunto come elemento del criterio di dominanza) che una strategia dominata non venga mai scelta (dal momento che esiste sempre una diversa mossa "migliore", qualunque sia la scelta dell'avversario);

Tuttavia vi possono essere dei casi in cui può essere non manifestamente irragionevole scegliere una strategia dominata
(Questa è una critica "pesante" al criterio di dominanza!)

Mossa dominata non irragionevole

La mossa b3 è dominata, ma potrebbe essere non irragionevole sceglierla.

		B		
		b1	b2	b3
A	a1	1 7	5 -1	6 3
	a2	6 -1	2 8	3 3

La dominanza: dominanza iterata

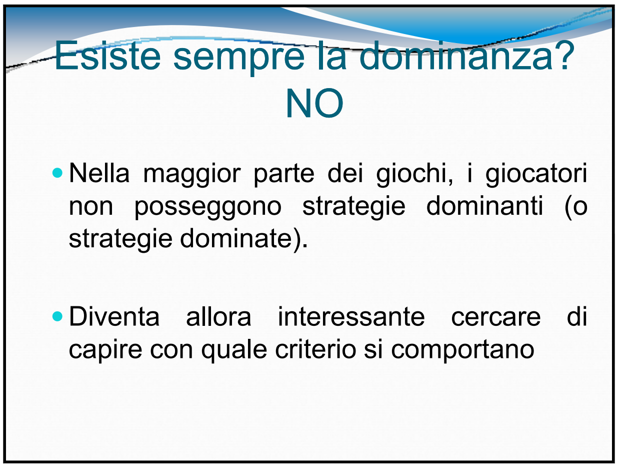
Vi sono casi in cui un giocatore (ad esempio il giocatore A) non possiede mosse dominanti.

Se però considera che un avversario (il giocatore B) possiede una strategia dominante (e quindi anticipa che la giocherà), allora può emergere come dominante una strategia che prima non lo era

Esempio di gioco con applicazione della dominanza iterata

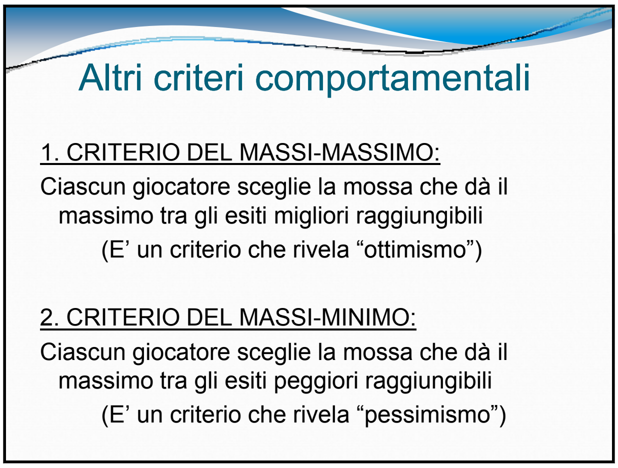
A non possiede strategie dominanti,
ma una volta osservato che per B la b3 è dominata,
allora per A la mossa a2 diventa dominante

		B		
		b1	b2	b3
A	a1	1 5	2 4	4 0
	a2	4 3	5 8	2 2



Esiste sempre la dominanza? NO

- Nella maggior parte dei giochi, i giocatori non posseggono strategie dominanti (o strategie dominate).
- Diventa allora interessante cercare di capire con quale criterio si comportano



Altri criteri comportamentali

1. CRITERIO DEL MASSI-MASSIMO:

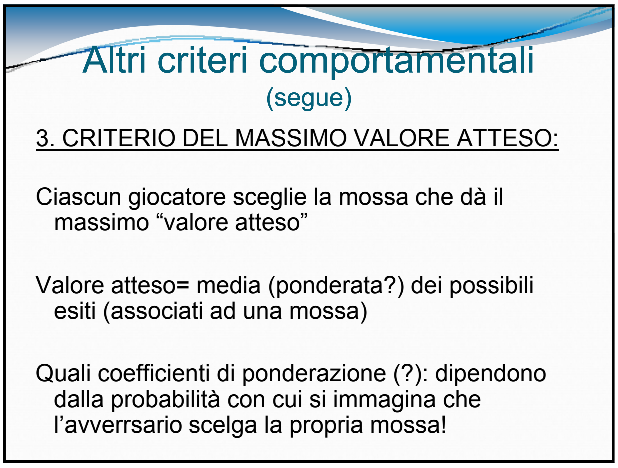
Ciascun giocatore sceglie la mossa che dà il massimo tra gli esiti migliori raggiungibili

(E' un criterio che rivela "ottimismo")

2. CRITERIO DEL MASSI-MINIMO:

Ciascun giocatore sceglie la mossa che dà il massimo tra gli esiti peggiori raggiungibili

(E' un criterio che rivela "pessimismo")



Altri criteri comportamentali (segue)

3. CRITERIO DEL MASSIMO VALORE ATTESO:

Ciascun giocatore sceglie la mossa che dà il massimo "valore atteso"

Valore atteso= media (ponderata?) dei possibili esiti (associati ad una mossa)

Quali coefficienti di ponderazione (?): dipendono dalla probabilità con cui si immagina che l'avverrsario scelga la propria mossa!

Parte 4

Concetto di Equilibrio: L'equilibrio di Nash

L'equilibrio di Nash

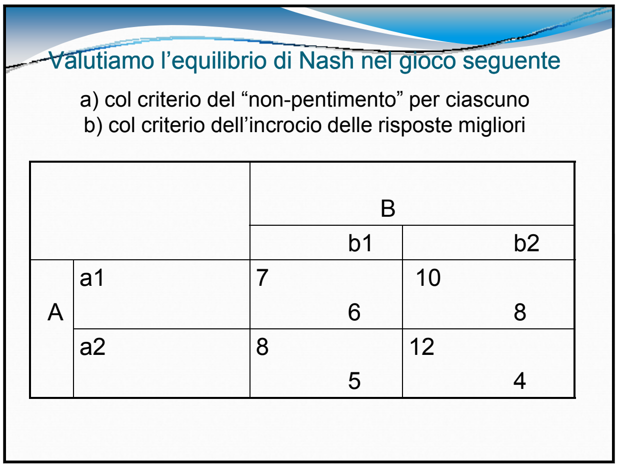
- Un'allocazione (incrocio delle strategie scelte da ciascun giocatore) rappresenta un EQUILIBRIO DI NASH se la strategia scelta da *ciascun* giocatore rappresenta la mossa migliore, *date* le strategie scelte dagli altri
- In altre parole, l'EQUILIBRIO DI NASH è l'incrocio delle risposte migliori che ciascuno può dare alle scelte altrui (e questo vale per ciascuno dei giocatori)
- In altre parole ancora, una situazione è EQUILIBRIO DI NASH se ciascun giocatore è contento di ciò che ha fatto, una volta osservati i comportamenti altrui:
- Una volta osservati i comportamenti altrui, ciascuno confermerebbe la propria scelta

L'equilibrio di Nash

Perciò per valutare se un'allocazione è un equilibrio di Nash possiamo prendere due strade (equivalenti):

- 1) valutare se un'allocazione comporta il fatto che nessuno dei giocatori si pente di ciò che ha fatto, una volta osservato l'altrui comportamento
- 2) valutare quale sia l'incrocio delle migliori risposte possibili

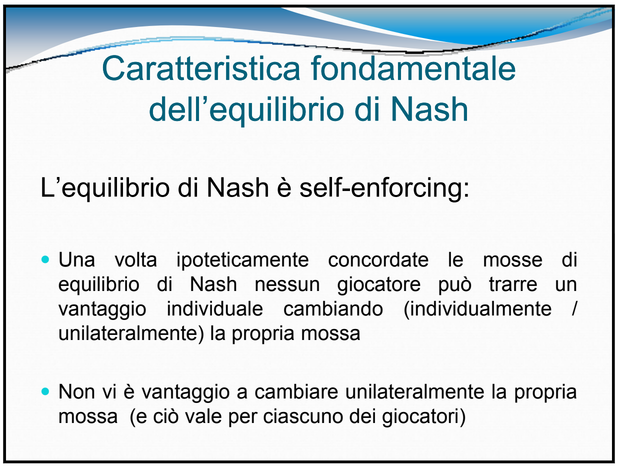
- Applichiamo di seguito ognuno di questi due criteri ad un semplice gioco 2x2



Valutiamo l'equilibrio di Nash nel gioco seguente

a) col criterio del "non-pentimento" per ciascuno
b) col criterio dell'incrocio delle risposte migliori

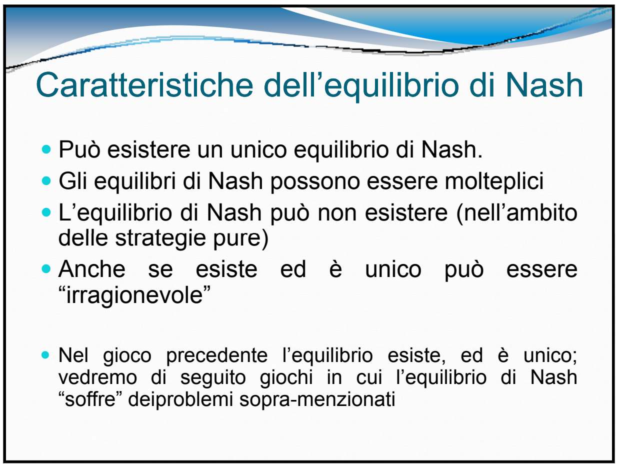
		B	
		b1	b2
A	a1	7 6	10 8
	a2	8 5	12 4



Caratteristica fondamentale dell'equilibrio di Nash

L'equilibrio di Nash è self-enforcing:

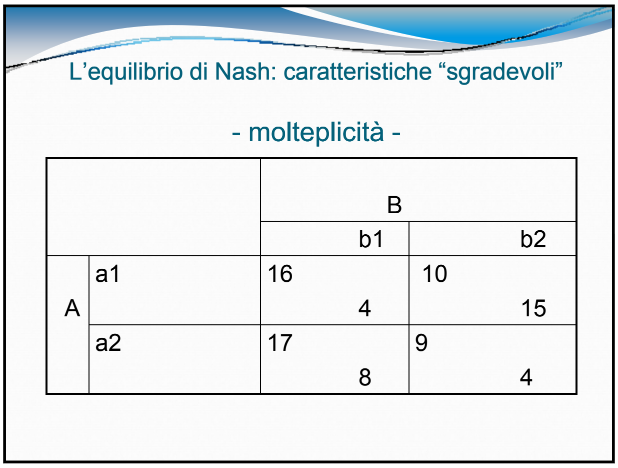
- Una volta ipoteticamente concordate le mosse di equilibrio di Nash nessun giocatore può trarre un vantaggio individuale cambiando (individualmente / unilateralmente) la propria mossa
- Non vi è vantaggio a cambiare unilateralmente la propria mossa (e ciò vale per ciascuno dei giocatori)



Caratteristiche dell'equilibrio di Nash

- Può esistere un unico equilibrio di Nash.
- Gli equilibri di Nash possono essere molteplici
- L'equilibrio di Nash può non esistere (nell'ambito delle strategie pure)
- Anche se esiste ed è unico può essere "irragionevole"

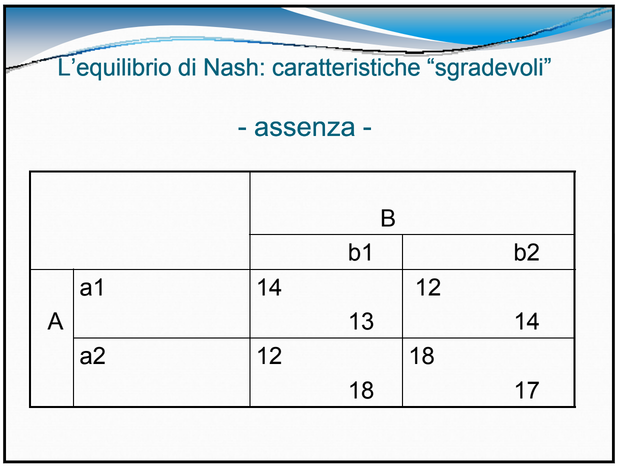
- Nel gioco precedente l'equilibrio esiste, ed è unico; vedremo di seguito giochi in cui l'equilibrio di Nash "soffre" deiproblemi sopra-menzionati



L’equilibrio di Nash: caratteristiche “sgradevoli”

- molteplicità -

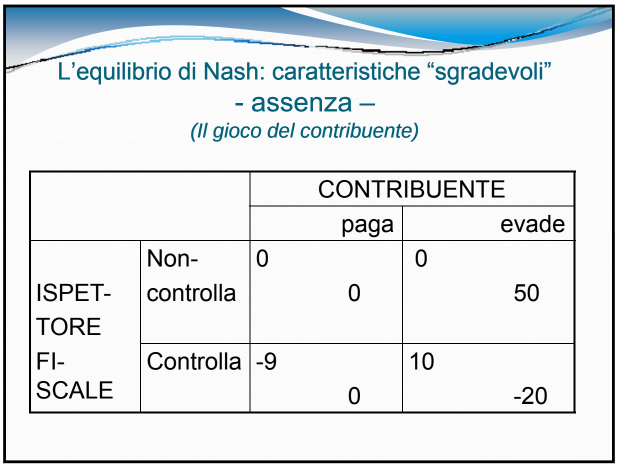
		B	
		b1	b2
A	a1	16 4	10 15
	a2	17 8	9 4



L’equilibrio di Nash: caratteristiche “sgradevoli”

- assenza -

		B	
		b1	b2
A	a1	14 13	12 14
	a2	12 18	18 17

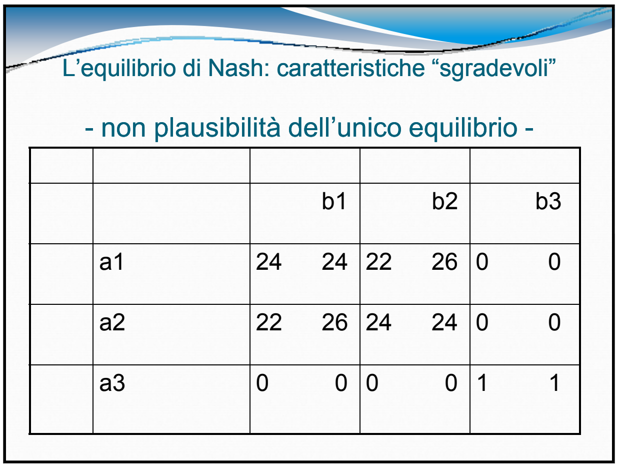


L’equilibrio di Nash: caratteristiche “sgradevoli”

- assenza –

(Il gioco del contribuente)

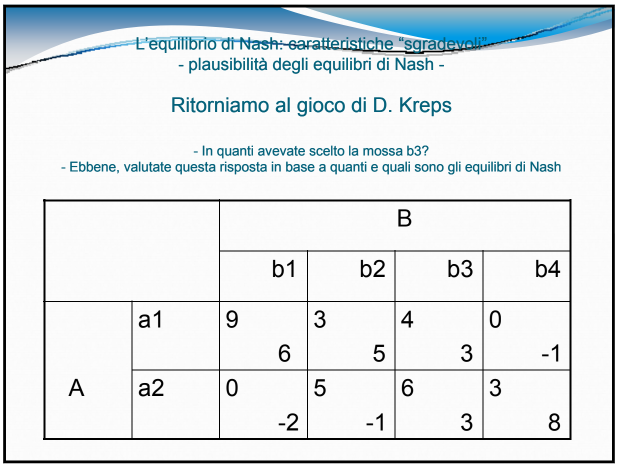
		CONTRIBUENTE	
		paga	evade
ISPETTORE FISCALE	Non-controlla	0 0	0 50
	Controlla	-9 0	10 -20



L’equilibrio di Nash: caratteristiche “sgradevoli”

- non plausibilità dell’unico equilibrio -

		b1	b2	b3
	a1	24 24	22 26	0 0
	a2	22 26	24 24	0 0
	a3	0 0	0 0	1 1

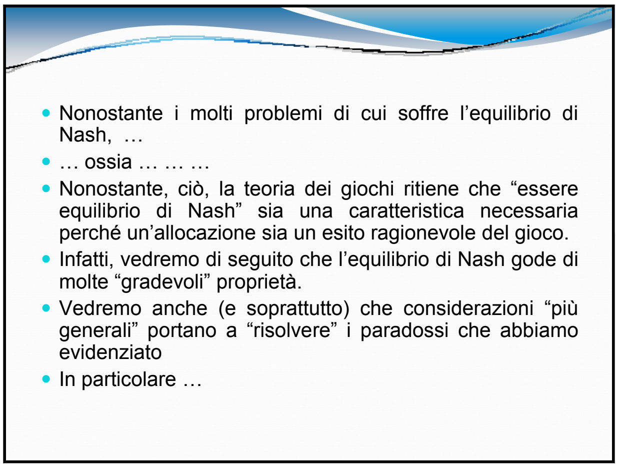


L’equilibrio di Nash: caratteristiche “sgradevoli”
- plausibilità degli equilibri di Nash -

Ritorniamo al gioco di D. Kreps

- In quanti avevate scelto la mossa b3?
- Ebbene, valutate questa risposta in base a quanti e quali sono gli equilibri di Nash

		B			
		b1	b2	b3	b4
A	a1	9 6	3 5	4 3	0 -1
	a2	0 -2	5 -1	6 3	3 8



- Nonostante i molti problemi di cui soffre l’equilibrio di Nash, …
- … ossia … … …
- Nonostante, ciò, la teoria dei giochi ritiene che “essere equilibrio di Nash” sia una caratteristica necessaria perché un’allocazione sia un esito ragionevole del gioco.
- Infatti, vedremo di seguito che l’equilibrio di Nash gode di molte “gradevoli” proprietà.
- Vedremo anche (e soprattutto) che considerazioni “più generali” portano a “risolvere” i paradossi che abbiamo evidenziato
- In particolare …

… In particolare,

- Molti paradossi (assenza dell'equilibrio , oppure non plausibilità dell'unico -apparentemente- equilibrio) si "risolvono" se ammettiamo che i giocatori possano scegliere STRATEGIE MISTE, ossia combinazioni probabilistiche di mosse da attuare (piuttosto che strategie pure", ossia UNA mossa scelta tra quelle a disposizione)
- La selezione tra molteplici equilibri esistenti può avvenire sulla base di criteri "aggiuntivi" da richiedere ad un equilibrio di Nash (REFINEMENTS)

Parte 5

Strategie miste

STRATEGIA MISTA

- Una strategia mista consiste nell'attribuzione di "probabilità" alle mosse da giocare;
- Ciascun giocatore sceglie una configurazione di probabilità,da assegnare alle mosse (o a un sottinsieme di mosse) di cui dispone
- Le probabilità devono essere fissate in modo RAZIONALE (ottimizzante)
- La somma delle probabilità deve dare 1
- Le probabilità devono MASSIMIZZARE il "Risultato atteso"

STRATEGIA MISTA: Un'intuizione

		b1	b2	b3
	a1	24 24	22 26	0 0
	a2	22 26	24 24	0 0
	a3	0 0	0 0	1 1

- Torniamo a qs. gioco
- Già sappiamo che c'è un unico equilibrio di Nash tra le strategie pure
- Ma se ciascuno si comporta così:
  A: sceglie a1 o a2;
  B: sceglie b1 o b2
- Equilibrio in strategie miste

STRATEGIA MISTA

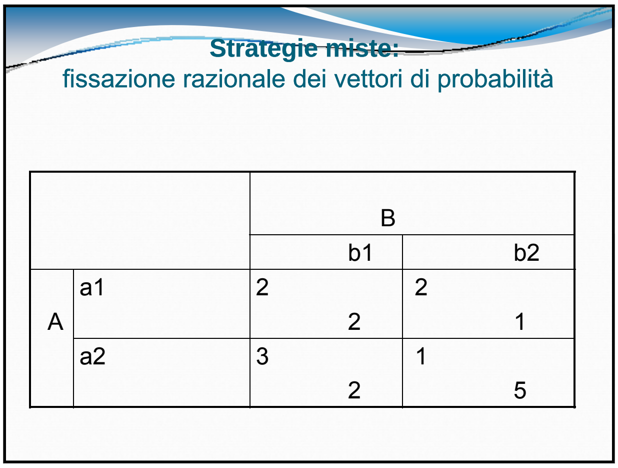
- Equilibrio di Nash in strategie miste:
- Ciascun giocatore ha elaborato una attribuzione di probabilità alle proprie mosse, tale che
- a) per ciascuno, la propria attribuzione di probabilità rappresenta la migliore risposta per ogni data mossa dell'avversario
- b) nessuno si pente della propria scelta probabilistica conoscendo le scelte probabiliste che degli avversari
- (Risulta MASSIMIZZATO l'esito atteso di ciascun giocatore, date le scelte altrui)

STRATEGIA MISTA

- John Nash (nella tesi di laurea, 1950, di 28 pagine) dimostra che:

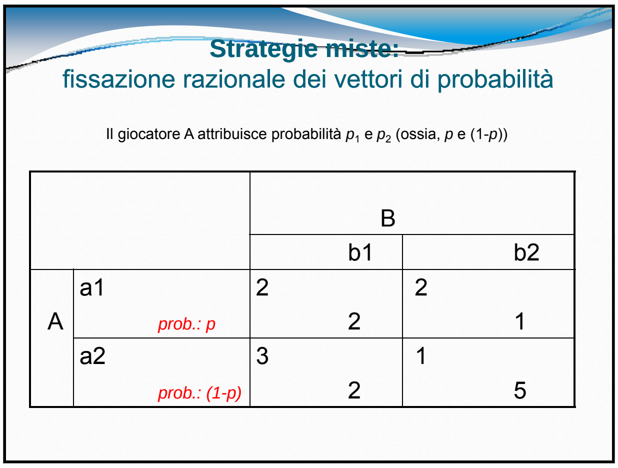
  ogni gioco con un numero finito di giocatori, ciascuno avente un numero finito di strategie, ammette sempre ALMENO un equilibrio, eventualmente nelle strategie miste.
  (TEOREMA DI NASH)

- [PROPRIETA' di ESISTENZA]: L'equilibrio (di Nash) esiste sempre in "giochi finiti" (se si ammette la possibilità di strategie miste)
- (La stessa procedura utilizzata da Nash verrà usata da Arrow e Debreu per dimostrare l'esistenza dell'equilibrio economico generale)
- Con strategie miste "scompaiono" casi in cui l'unico equilibrio in strategie pure è poco plausibile: sono casi in cui l'unico equilibrio in strategie pure è Pareto - dominato da equilibri in strategie miste.



Strategie miste:
fissazione razionale dei vettori di probabilità

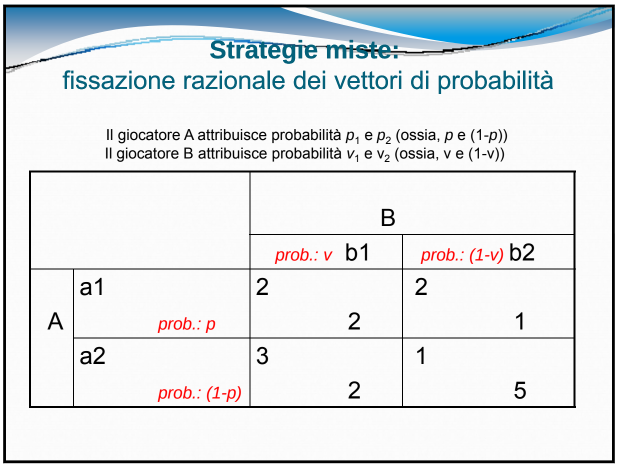
		B	
		b1	b2
A	a1	2 2	2 1
	a2	3 2	1 5



Strategie miste:
fissazione razionale dei vettori di probabilità

Il giocatore A attribuisce probabilità p_1 e p_2 (ossia, p e $(1-p)$)

		B	
		b1	b2
A	a1 *prob.: p*	2 2	2 1
	a2 *prob.: (1-p)*	3 2	1 5



Strategie miste:
fissazione razionale dei vettori di probabilità

Il giocatore A attribuisce probabilità p_1 e p_2 (ossia, p e $(1-p)$)
Il giocatore B attribuisce probabilità v_1 e v_2 (ossia, v e (1-v))

		B	
		prob.: v b1	*prob.: (1-v)* b2
A	a1 *prob.: p*	2 2	2 1
	a2 *prob.: (1-p)*	3 2	1 5

Strategie miste:
fissazione razionale dei vettori di probabilità

Probabilità di ciascun esito: l'incrocio (prodotto) delle probabilità individuali

		B	
		prob.: v b1	prob.: $(1-v)$ b2
A	a1 prob.: p	2 prob.: pv 2	2 prob.: $p(1-v)$ 1
	a2 prob.: $(1-p)$	3 prob.: $(1-p)v$ 2	1 prob.: $(1-p)(1-v)$ 5

Strategie Miste

- Esempio (segue)

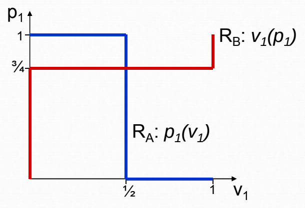
		B	
		$b_1(v_1)$	$b_2(v_2)$
A	$a_1\ (p_1)$	2 2	2 1
	$a_2(p_2)$	3 2	1 5

$$E(U^A) = 2p_1v_1+2p_1v_2+3p_2v_1+p_2v_2= (-2v_1+1)p_1+2v_2+1 \rightarrow p^*_1 = \begin{cases} 0 & \text{per } v_1 > ½ \\ 1 & \text{per } v_1 < ½ \\ \text{indet} & \text{per } v_1 = ½ \end{cases}$$

$$E(U^B) = 2p_1v_1+p_1v_2+2p_1v_2+5p_2v_2= (4p_1-3)v_1-4p_1+5 \rightarrow v^*_1 = \begin{cases} 0 & \text{per } p_1 < ¾ \\ 1 & \text{per } p_1 > ¾ \\ \text{indet} & \text{per } p_1 = ¾ \end{cases}$$

Strategie Miste

- Rappresentazione grafica:



Strategie miste:

fissazione razionale dei vettori di probabilità

Esempio: L'invasione angloamericana d'Europa
contro i Nazisti: dove sbarcare?, dove ammassarsi?

		NAZI	
		ammasso a Calais	ammasso in Normandia
A	Sbarco a Calais	20 80	100 0
	Sbarco in Normandia	80 0	60 20

Strategie miste:

fissazione razionale dei vettori di probabilità

Esempio: L'invasione angloamericana d'Europa
contro i Nazisti: dove sbarcare?, dove ammassarsi?

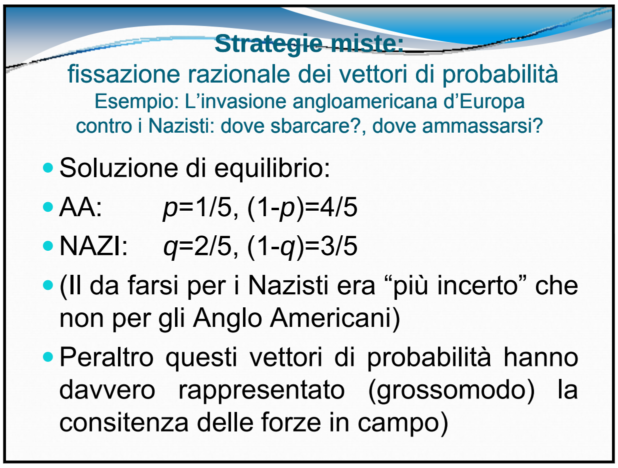
- Nel gioco non esiste alcun equilibrio di Nash (almeno nell'ambito delle strategie pure)
- Valutiamo l'equilibrio in strategie miste
- Gli AA attribuiscono probabilità p alla mossa Calais (e $(1-p)$ alla mossa Normandia);
- I Nazi attribuiscono probabilità q alla propria mossa Calais (e $(1-q)$ alla mossa Normandia);
- Verifichiamo l'esistenza dell'equilibrio
- Potremmo interpretare p e q come la percentuale di forze messe in campo da ciascuno sulle rispettive scelte

Strategie miste:

fissazione razionale dei vettori di probabilità

Esempio: L'invasione angloamericana d'Europa
contro i Nazisti: dove sbarcare?, dove ammassarsi?

		NAZI	
		ammasso a Calais *prob.: q*	ammasso in Normandia *prob.: 1-q*
A	Sbarco a Calais *prob.: p*	20 80	100 0
	Sbarco in Norm *prob.: 1-p*	80 0	60 20



Strategie miste:
fissazione razionale dei vettori di probabilità

Esempio: L’invasione angloamericana d’Europa contro i Nazisti: dove sbarcare?, dove ammassarsi?

- Soluzione di equilibrio:
- AA: p=1/5, (1-p)=4/5
- NAZI: q=2/5, (1-q)=3/5
- (Il da farsi per i Nazisti era “più incerto” che non per gli Anglo Americani)
- Peraltro questi vettori di probabilità hanno davvero rappresentato (grossomodo) la consitenza delle forze in campo)

Strategie Miste: Esercizi

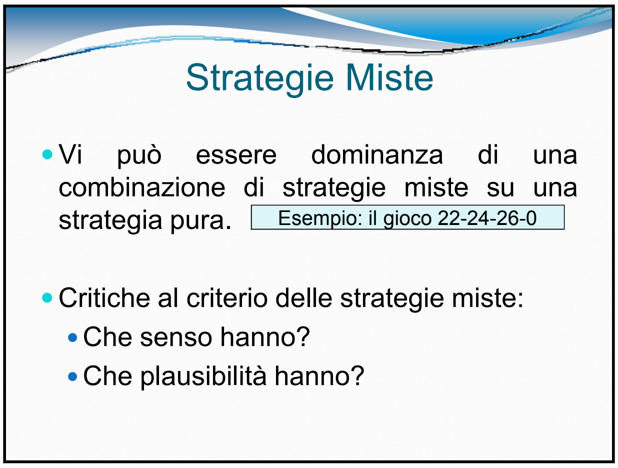
- Determinare l’equilibrio di Nash in strategie miste del gioco del contribuente

ISP.: q_1= 10/19 q_2=9/19
CONTR.: p_1= 2/7 p_2= 5/7

- Determinare l’equilibrio di Nash in strategie miste nel gioco seguente:

	B	
A	4, 3	2, 4
	2, 8	8, 7

R.: p_1= ½
v_1 = ¾



Strategie Miste

- Vi può essere dominanza di una combinazione di strategie miste su una strategia pura. Esempio: il gioco 22-24-26-0
- Critiche al criterio delle strategie miste:
  - Che senso hanno?
  - Che plausibilità hanno?

- Abbiamo “curato” l’assenza dell’equilibrio di Nash.
- E quando c’è pluralità?

  In questi casi per la scelta ci si affida ai *refinements* dell’equilibrio di Nash, tra i quali:

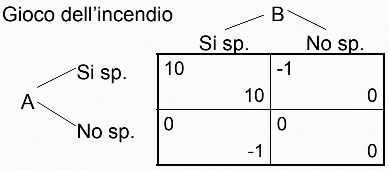
  1) Ordinamento Paretiano
  2) Sub-game Perfection
  3) Trembling Hand Robustness
  4) Convenzioni sociali
  5) Focal point

Parte 6

Refinements (Raffinamenti) dell’equilibrio di Nash

REFINEMENT: Ordinamento Paretiano

- E’ da ritenersi preferibile un equilibrio di Nash che **Pareto - domina** un altro equilibrio
- Esempio: Gioco dell’incendio



	Si sp.	No sp.
Si sp.	10 10	-1 0
No sp.	0 -1	0 0

Ci sono DUE equilibri (10,10) e (0,0) ma il primo è Pareto superiore al secondo

REFINEMENT: Ordinamento Paretiano

- Critica
  Esaminare il seguente gioco

	b_1	b_2
a_1	8 1	4 * 3
a_2	8 * 9	3 1

- Ci sono DUE equilibri di Nash : (4,3);(8,9)

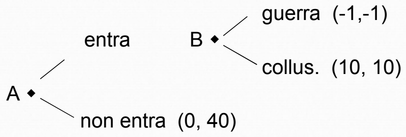
- Ma l'equilibrio di Nash Pareto-superiore (8,9) coinvolge la mossa a_2 che è dominata

REFINEMENT: Sub-game Perfection

(Selten, 1965)

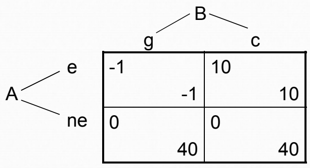
- Dato un equilibrio di un gioco sequenziale, l'eq. di Nash deve coinvolgere strategie che rappresentano un equilibrio di Nash per ogni sottogioco costituente, ossia, anche se il gioco inizia nel modo non iniziale.

Esempio



REFINEMENT: Sub-game Perfection

- In forma matriciale il gioco sequenziale precedente diventa:



	g	c
e	-1 -1	10 10
ne	0 40	0 40

N-eq. (e-c);(ne-g)

- ***Non ha senso "g" per B, posto che A "ne";***
- ***L'equilibrio (ne-g) implica una scelta non razionale per B, posto che A ha già scelto ne***

REFINEMENT:
Sub-game perfection

- ***DEFINIZIONE:***
- ***Un equilibrio di Nash si dice PERFETTO NEI SOTTOGIOCHI (o PERFETTO ALLA SELTEN) se le strategie che coinvolge rappresentano equilibri di Nash in ogni sotto-gioco costituente.***
- ***Sottogioco:***

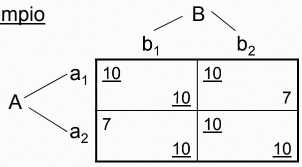
  ogni gioco che ha inizio in un nodo successivo al primo
- ***La perfezione nei sottogiochi ha particolare rilevanza in giochi sequenziali***

REFINEMENT:
Trembling Hand Robust

- Un equilibrio di Nash è robusto al criterio della *mano tremante* se coinvolge mosse che continuano a rappresentare la risposta migliore, anche se l'avversario "sbaglia".
- Ha senso nei giochi ad informazione incompleta.

REFINEMENT:
Trembling Hand Robust

- Esempio

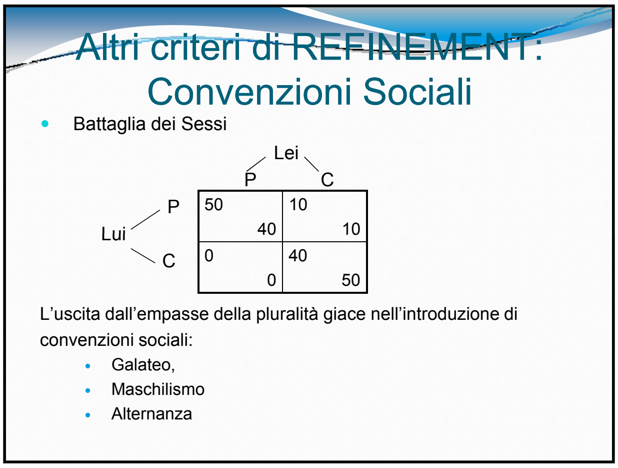


	b_1	b_2
a_1	10 10	10 7
a_2	7 10	10 10

- (a_1-b_1) è N-eq., robusto alla mano tremante

  per A, se B sbaglia è indifferente; per B, se A sbaglia è indifferente
- (a_2-b_2) è N-eq., NON robusto alla mano tremante

  se B giocasse b_1, ad A non sarebbe certo convenuto fare a_2!!!



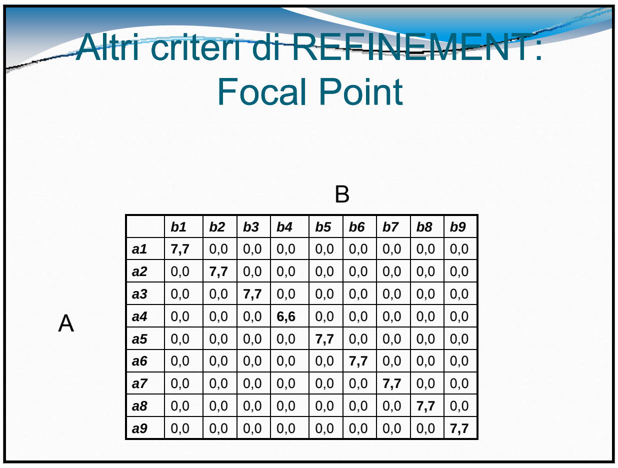
Altri criteri di REFINEMENT: Convenzioni Sociali

- Battaglia dei Sessi

		Lei	
		P	C
Lui	P	50 40	10 10
	C	0 0	40 50

L'uscita dall'empasse della pluralità giace nell'introduzione di convenzioni sociali:

- Galateo,
- Maschilismo
- Alternanza

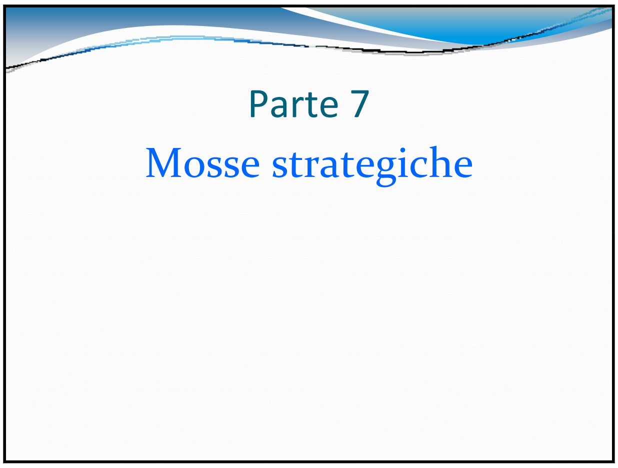


Altri criteri di REFINEMENT: Focal Point

B

A

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8	b9
a1	7,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
a2	0,0	7,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
a3	0,0	0,0	7,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
a4	0,0	0,0	0,0	6,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
a5	0,0	0,0	0,0	0,0	7,7	0,0	0,0	0,0	0,0
a6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	7,7	0,0	0,0	0,0
a7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	7,7	0,0	0,0
a8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	7,7	0,0
a9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	7,7



Parte 7

Mosse strategiche

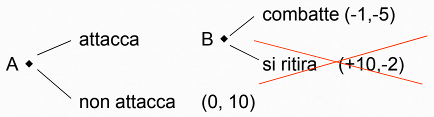
Mosse Strategiche

(Shelling, 1960)

- Prima dell'inizio del gioco i giocatori possono compiere mosse che alterano la matrice degli esiti:
  - Promesse
    (Es. *Se vieni alla partita*...; politica industriale strategica)
  - Minacce
    (Es. *Se non vieni alla partita*...; sanzioni penali per reati)
  - Commitment
    (Es. Capacità produttiva; limitazione libertà)

Mosse Strategiche: Esempio di Commitment

- Gioco degli eserciti



A
attacca
B
combatte (-1,-5)
~~si ritira (+10,-2)~~
non attacca
(0, 10)

Equilibrio: attacca-si ritira (+10,-2)

→*Commitment*: Taglia i ponti

→Equilibrio (con *commitment*): non attacca (0,10)
Importanza filosofica del gioco dell'esercito

Mosse Strategiche: Esempio di Commitment

Alibus \ Boeing	Si prod.	No prod.
Si prod.	-5 -5	100 0
No prod.	0 100	0 0

2 Nash-eq.
(100, 0)
(0, 100)

L'EU dà un sussidio di 25

A \ B	Si	No
Si	+20 -5	125 0
No	0 100	0 0

Un solo Equilibrio Nash
(125, 0)

Parte 8

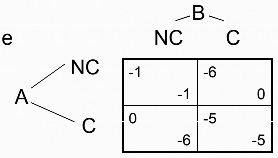
Dilemma del prigioniero

e

Giochi ripetuti

Dilemma del Prigioniero

- Storia originale



		B	
		NC	C
A	NC	-1 -1	-6 0
	C	0 -6	-5 -5

- Ciascun giocatore possiede una strategia dominante
- L'incrocio delle strategie dominanti è Equilibrio di Nash
- L'equilibrio di Nash è Pareto-inefficiente
- L'allocazione Pareto-efficiente NON è equilibrio di Nash

TUTTI I GIOCHI CHE HANNO QUESTE QUATTRO CARATTERISTICHE SONO DILEMMI DEL PRIGIONIERO

Dilemma del Prigioniero: Importanza

- Molte situazioni sono riconducibili a questo particolare tipo di gioco:
  - Beni Pubblici
  - Cartelli
- Importanza "filosofica":
  - Antitetico alla metafora della mano invisibile
  - Interdipendenza strategica come FALLIMENTO MICROECONOMICO DEL MERCATO

Dilemma del Prigioniero: Esempio

- Bene pubblico (televisore)

B

		paga	non paga
A	paga	1200 1200	900 1500
	non paga	1500 900	1000 1000

$W^A=W^B=1000$
Utilità televisore=500
Costo televisore=600

Dilemma del Prigioniero

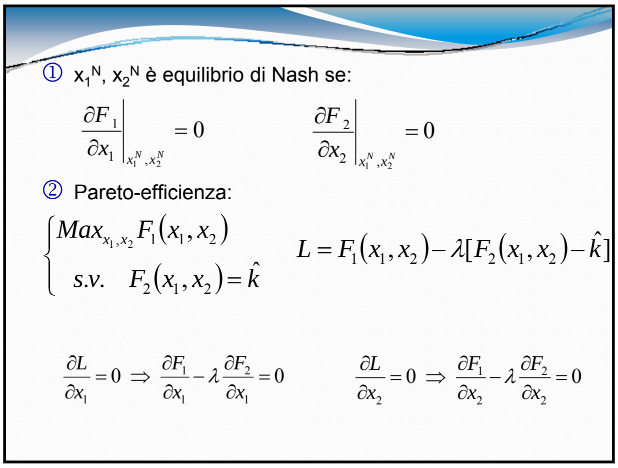
- Nel dilemma del prigioniero, il N-eq. è Pareto-inefficiente
- ciò testimonia che in giochi a strategie discrete, il N-eq. PUO' ESSERE Pareto-inefficiente
- Tuttavia, in strategie continue, l'equilibrio di Nash E' SICURAMENTE Pareto-inefficiente

Inefficienza Paretiana degli Equilibri di Nash con strategie continue

Dimostrazione della proposizione:

"con strategie continue, l'equilibrio di Nash è Pareto-inefficiente"

- Giocatori: 1 e 2
- Insieme di scelta: 1: un numero reale, x_1 Є R
  2: un numoero reale, x_2 Є R
- Esiti: per giocatore 1: $U_1=F_1(x_1,x_2)$
  per giocatore 2: $U_2=F_2(x_1,x_2)$
- In interdipendenza strategica $\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \neq 0$; $\frac{\partial U_2}{\partial x_1} \neq 0$



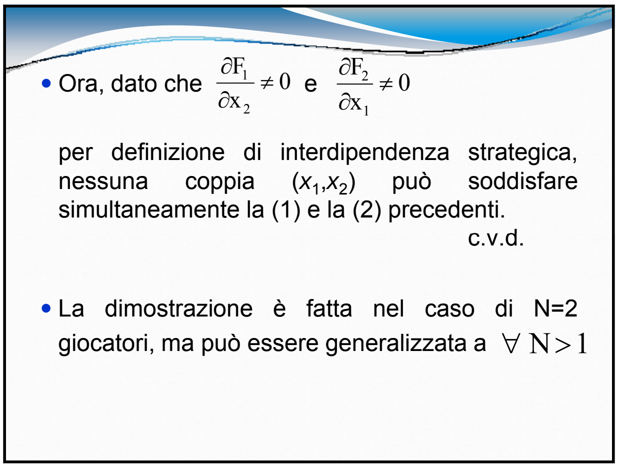
① x_1^N, x_2^N è equilibrio di Nash se:

$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right|_{x_1^N, x_2^N} = 0 \qquad \left.\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right|_{x_1^N, x_2^N} = 0$$

② Pareto-efficienza:

$$\begin{cases} Max_{x_1, x_2} F_1(x_1, x_2) \\ s.v. \quad F_2(x_1, x_2) = \hat{k} \end{cases} \qquad L = F_1(x_1, x_2) - \lambda[F_2(x_1, x_2) - \hat{k}]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0$$

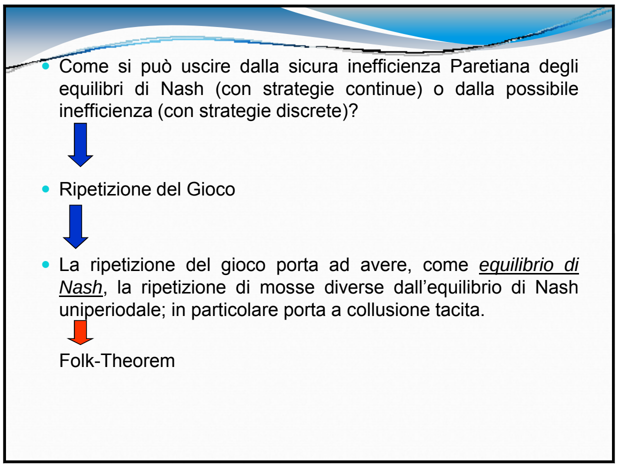


- Ora, dato che $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} \neq 0$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x_1} \neq 0$

  per definizione di interdipendenza strategica, nessuna coppia (x_1,x_2) può soddisfare simultaneamente la (1) e la (2) precedenti.

  c.v.d.

- La dimostrazione è fatta nel caso di N=2 giocatori, ma può essere generalizzata a $\forall \, N > 1$



- Come si può uscire dalla sicura inefficienza Paretiana degli equilibri di Nash (con strategie continue) o dalla possibile inefficienza (con strategie discrete)?

- Ripetizione del Gioco

- La ripetizione del gioco porta ad avere, come *equilibrio di Nash*, la ripetizione di mosse diverse dall'equilibrio di Nash uniperiodale; in particolare porta a collusione tacita.

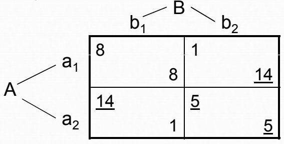
Folk-Theorem

Parte 8(bis)
Gioco ripetuto

Folk-Theorem
(John Friedman, 1971)

- La ripetizione infinita di un gioco <u>può portare</u> a giocare infinite volte le mosse di esito Pareto-efficiente anche se non sono l'equilibrio di Nash del gioco *one-shot*.

abbiamo concordato l'esito P.E. (8,8)



MI METTO NEI PANNI DEL GIOCATORE A

- Se devio

t=0	t=1	t=2	t=3	t=4
+6	-3	-3	-3	-3

(ho 14 anziché 8) (ho 5 anziché 8 … … … … … … … … … … … … … …

Folk-Theorem

- CONVIENE tenere fede all'accordo cooperativo se:

$$6<\frac{1}{1+\rho}\cdot 3+\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2\cdot 3+\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^3\cdot 3+\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^4\cdot 3+\ldots$$

$$6<\sum_{t=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t\cdot 3$$

Guadagno immediato dalla deviazione

Valore attuale delle perdite future

- $\sum_{t=0}^{+\infty}\alpha^t=\frac{1}{1-\alpha}\Rightarrow\sum_{t=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t=\frac{1}{1-\frac{1}{1+\rho}}-1=\frac{1+\rho}{\rho}-1=\frac{1}{\rho}$

Folk-Theorem

- $6 < \frac{1}{\rho} \cdot 3$ ⇒ $\rho < \frac{1}{2}$
- MI CONVIENE tenere fede all'accordo se $\rho < \frac{1}{2}$
  - ρ è il tasso di impazienza
- MI CONVIENE tenere fede all'accordo se attribuisco adeguata importanza al futuro

Folk-Theorem

- Per il giocatore *i* vale: $\pi_i^{DEV} > \pi_i^{COOP} > \pi_i^{NASH}$
- Diviene INDIVIDUALMENTE ottimale (conveniente) per il giocare *i* la mossa di esito cooperativo se:

$$\left(\pi^{DEV} - \pi^{COOP}\right) < \underbrace{\sum_{t=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t}_{\frac{1}{\rho}} \left[\pi^{COOP} - \pi^{NASH}\right]$$

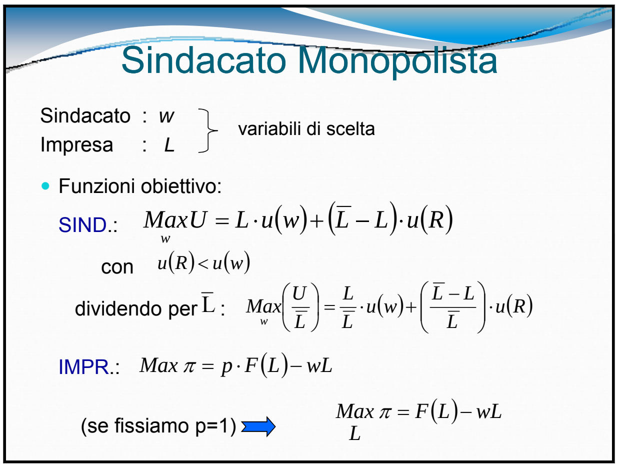
ossia, $\rho < \dfrac{\pi^{COOP} - \pi^{NASH}}{\pi^{DEV} - \pi^{COOP}}$ (si dà adeguata importanza al futuro)

Parte 9

Esempi di giochi con strategie continue

Strategie Continue

- Esempi di giochi in strategie continue
  - Modello del sindacato monopolista come gioco
  - Modello standard di oligopolio
  - Modello di Barro e Gordon di politica monetaria come gioco



Sindacato Monopolista

Sindacato : *w*
Impresa : *L*
$\left.\right\}$ variabili di scelta

- Funzioni obiettivo:

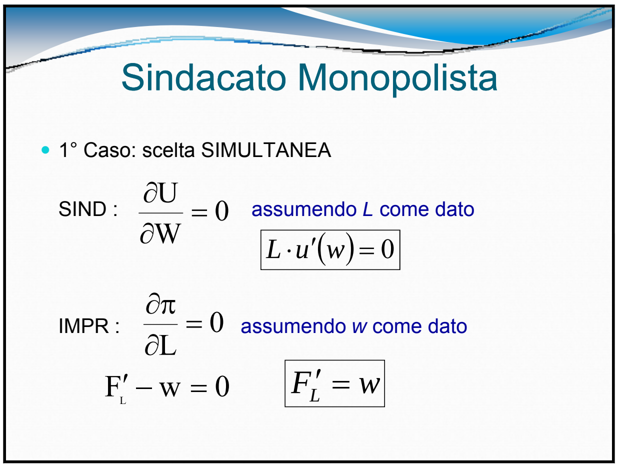
SIND.: $\underset{w}{Max} U = L \cdot u(w) + (\bar{L} - L) \cdot u(R)$

con $u(R) < u(w)$

dividendo per $\bar{L}$: $\underset{w}{Max}\left(\frac{U}{\bar{L}}\right) = \frac{L}{\bar{L}} \cdot u(w) + \left(\frac{\bar{L} - L}{\bar{L}}\right) \cdot u(R)$

IMPR.: $Max\ \pi = p \cdot F(L) - wL$

(se fissiamo p=1) ➡ $\underset{L}{Max}\ \pi = F(L) - wL$



Sindacato Monopolista

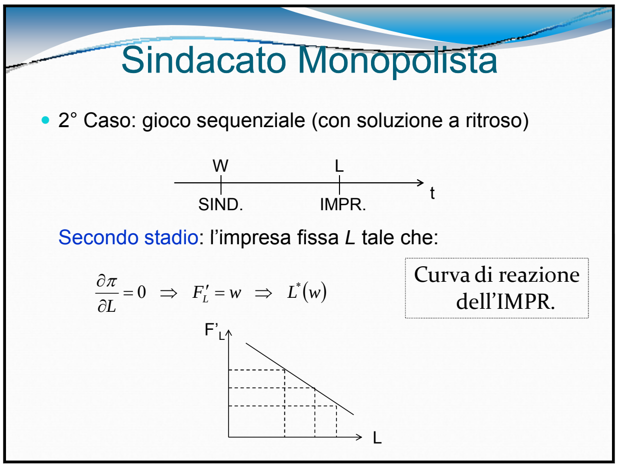
- 1° Caso: scelta SIMULTANEA

SIND : $\frac{\partial U}{\partial W} = 0$ assumendo *L* come dato

$\boxed{L \cdot u'(w) = 0}$

IMPR : $\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0$ assumendo *w* come dato

$F'_L - w = 0$ $\boxed{F'_L = w}$



Sindacato Monopolista

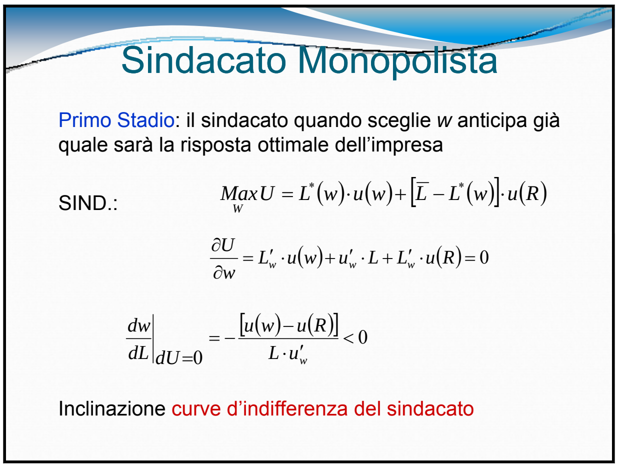
- 2° Caso: gioco sequenziale (con soluzione a ritroso)

W L
SIND. IMPR. t

Secondo stadio: l'impresa fissa *L* tale che:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0 \;\Rightarrow\; F_L' = w \;\Rightarrow\; L^*(w)$$

Curva di reazione dell'IMPR.



Sindacato Monopolista

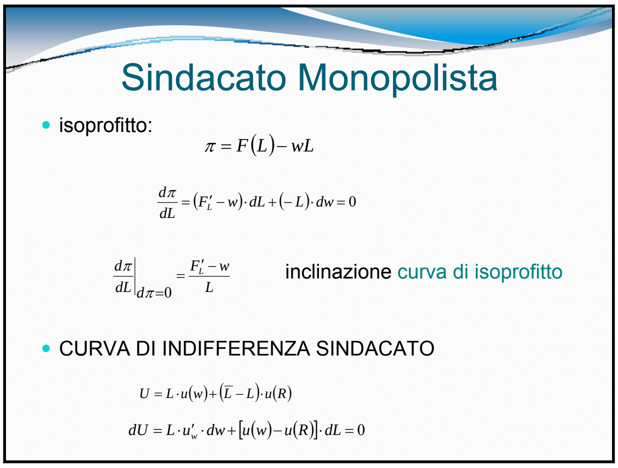
Primo Stadio: il sindacato quando sceglie *w* anticipa già quale sarà la risposta ottimale dell'impresa

SIND.: $$\underset{w}{Max}\, U = L^*(w)\cdot u(w) + \left[\bar{L} - L^*(w)\right]\cdot u(R)$$

$$\frac{\partial U}{\partial w} = L_w' \cdot u(w) + u_w' \cdot L + L_w' \cdot u(R) = 0$$

$$\left.\frac{dw}{dL}\right|_{dU=0} = -\frac{\left[u(w) - u(R)\right]}{L \cdot u_w'} < 0$$

Inclinazione curve d'indifferenza del sindacato



Sindacato Monopolista

- isoprofitto:

$$\pi = F(L) - wL$$

$$\frac{d\pi}{dL} = \left(F_L' - w\right)\cdot dL + (-L)\cdot dw = 0$$

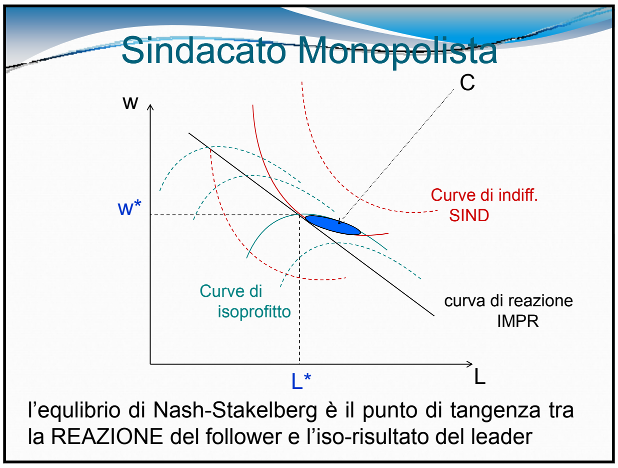
$$\left.\frac{d\pi}{dL}\right|_{d\pi=0} = \frac{F_L' - w}{L}$$ inclinazione curva di isoprofitto

- CURVA DI INDIFFERENZA SINDACATO

$$U = L \cdot u(w) + \left(\bar{L} - L\right)\cdot u(R)$$

$$dU = L \cdot u_w' \cdot dw + \left[u(w) - u(R)\right]\cdot dL = 0$$

Sindacato Monopolista



l'equlibrio di Nash-Stakelberg è il punto di tangenza tra la REAZIONE del follower e l'iso-risultato del leader

Sindacato Monopolista

- Per mostrare che è INEFFICIENTE:
  a parità di U, è possibile avere PROFITTI più elevato!
  a parità di PROFITTO, è possibile avere U più elevate!
- CURVA DEI CONTRATTI:
  Tangenza tra le curve di iso-risultato dei due giocatori

$$\frac{u(R)-u(w)}{L\cdot u'(w)}=\frac{F'(L)-w}{L}$$

Sindacato Monopolista

- Notare che è lo stesso risultato del problema:

$$\begin{cases} Max\ \pi = F(L) - wL \\ s.v.\ \ U = u(w)\cdot L + (\overline{L} - L)\cdot u(R) = \overline{u} \end{cases}$$

- La configurazione efficiente può essere "imposta" da un attore terzo (ad esempio, il Governo con politiche dei redditi "dirigiste")
- La ripetizione del gioco può consentire, se avviene infinite volte, di raggiungere la soluzione efficiente,come risultato di self-interest (NON occorre l'intervento dello governo nella contrattazione privata,se questa è ripetuta nel tempo!)

Oligopolio

- (omesso perché già trattato)

Modello di Barro-Gordon

(1983)

- (omesso)

Parte 10

Giochi a informazione incompleta

Equilibrio di Nash bayesiano perfetto

- E' un insieme di CREDENZE sulla probabilità di ciascun evento e ciascuna azione e di AZIONI tali che:
  1) Il giocatore cui spetta la mossa deve avere una lista di probabilità coerenti;
  2) Date le probabilità, le azioni scelte devono massimizzare il proprio esito atteso;
  3) Le probabilità devono essere aggiornate rispettando la regola di Bayes
  4) Tutto ciò deve valere per OGNUNO dei giocatori

Parte 10

Giochi a informazione incompleta

-un altro esempio-

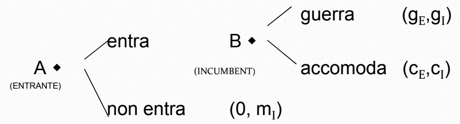
Gioco dell'incumbent e dell'entrante

(se ripetuto: chain-store paradox)

Modello dell'entrante e dell'incumbent

con informazione incompleta

- Gioco base costituente



A ◆ (ENTRANTE)

entra

B ◆ (INCUMBENT)

guerra (g_E,g_I)

accomoda (c_E,c_I)

non entra $(0, m_I)$

ORDINE DEI GUADAGNI:

Entrante: $c_E>0>g_E$

Incumbent FORTE (S=strong): $m_I>g_I>c_I$

Incumbent DEBOLE: (W=weak): $m_I>c_I>g_I$

Modello dell'entrante e dell'incumbent

con informazione incompleta

Incumbent:

SE Incumbent FORTE (S=strong): gioca guerra (posto che E sia entrato)

SE Incumbent DEBOLE: (W=weak): gioca accomoda (se E è entrato)

Entrante:

Gli converrà sicuramente giocare "non entra", se sa di fronteggiare un incumbent FORTE (infatti, il forte farà la guerra e questo porterà a profitti negativi per il potenziale entrante che è entrato)

Gli converrà sicuramente giocare "entra", se sa di fronteggiare un incumbent DEBOLE (infatti, sa che un incumbent debole giocherà "accomodare" perché non gli converrebbe fare altrimenti)

E SE IL POTENZIALE ENTRANTE NON CONOSCE IL TIPO DI INCUMBENT CHE FRONTEGGIA??

Modello dell'entrante e dell'incumbent

con informazione incompleta

E SE IL POTENZIALE ENTRANTE NON CONOSCE IL TIPO DI INCUMBENT CHE FRONTEGGIA??

Può avere delle "credenze a priori" (probabilità ex ante sul tipo fronteggiato)

Siano: Prob(I=W) = p

Prob(I=S) = (1-p)

Il guadagno atteso (E(G)) da ENTRANTE, nel gioco one-shot, dall'entrata sarà:

$$E(G)= p\ c_E + (1-p)\ g_E$$

(a seconda che sia positivo o negativo, gli converrà entrare oppure no)

Modello dell'entrante e dell'incumbent

con informazione incompleta

SE IL GIOCO E' RIPETUTO DUE VOLTE:

In ogni caso, l'incumbent FORTE, giocherà la sua mossa "guerra" (sia nel primo round del gioco sia nel secondo round del gioco)

Invece, l'incumbent DEBOLE *potrebbe* avere convenienza, a non giocare sempre "accomoda" (se questo porta l'altro a credere di fronteggiare un incumbent forte); in particolare, nel primo round del gioco l'incumbent DEBOLE *potrebbe avere convenienza* a giocare "guerra", se questo fa convincere l'entrante che sta fronteggiando un incumbent forte e quindi lo dissuada ad entrare sul mercato nel secondo round del gioco.

Analizzeremo la convenienza a camuffarsi = fare "cheating"

Modello dell'entrante e dell'incumbent

con informazione incompleta

Se vale: $g_I + \frac{1}{1+r} m_I > c_I + \frac{1}{1+r} c_I$

l'incumbent ha incentivo a fare cheating

Se invece valesse il segno "minore", l'incumbent non avrebbe nessun motivo di fare cheating

Se vale MAGGIORE, l'osservazione di comportamenti di guerra non rivela con sicurezza il tipo di incumbent

➔ **Equilibrio pooling**

Se vale MINORE, l'osservazione del comportamento attuato (guerra o accomodante) rivela il tipo di giocatore

➔ **Equilibrio separating**

Modello dell'entrante e dell'incumbent

con informazione incompleta

Lista di probablità ex ante:

Pr (I=S)= Pr (S)= 1-p

Pr(I=W)=Pr(W)=p

Lista di probabilità condizionate al tipo

$$\Pr\left(c \;|S\right) = 0$$

$$\Pr\left(g \;|S\right) = 1$$

Lista di probabilità condizionate all'osservazione di un evento

… Applicheremo il teorema di Bayes

Modello dell'entrante e dell'incumbent

con informazione incompleta

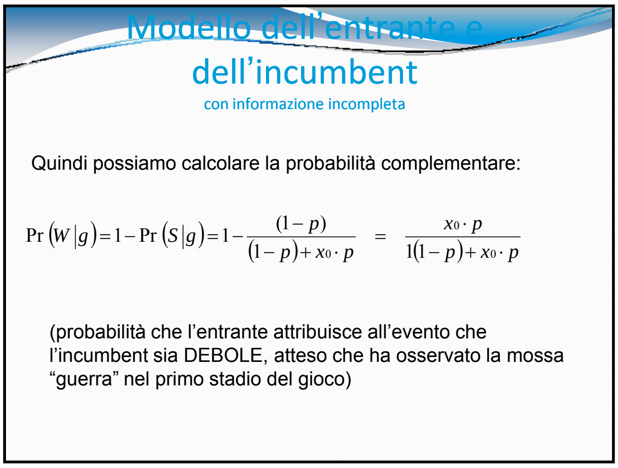
Applicando il teorema di Bayes:

(Regola generale): $$\Pr\left(X = x_i | Y\right) = \frac{\Pr\left(Y | x_i\right) \cdot \Pr\left(x_i\right)}{SUM_i \Pr\left(Y | x_i\right) \cdot \Pr\left(x_i\right)}$$

(Applicazione qui): $$\Pr\left(S | g\right) = \frac{\Pr\left(g | S\right) \cdot \Pr\left(S\right)}{\Pr\left(g | S\right) \cdot \Pr\left(S\right) + \Pr\left(g W\right) \cdot \Pr\left(W\right)}$$

$$\Pr\left(S | g\right) = \frac{1 \cdot (1-p)}{1(1-p) + x_0 \cdot p}$$

dove x_0 è la probablità di giocare guerra, atteso che si è deboli, ovverosia la probabilità di fare cheating



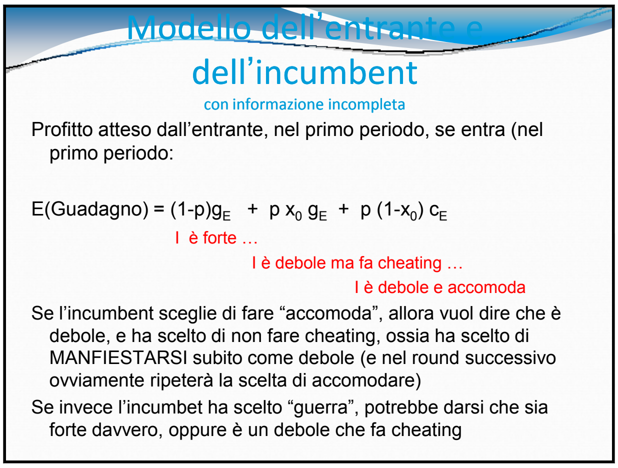
Modello dell'entrante e dell'incumbent

con informazione incompleta

Quindi possiamo calcolare la probabilità complementare:

$$\Pr\left(W|g\right)=1-\Pr\left(S|g\right)=1-\frac{(1-p)}{\left(1-p\right)+x_0\cdot p} \quad = \quad \frac{x_0\cdot p}{1\left(1-p\right)+x_0\cdot p}$$

(probabilità che l'entrante attribuisce all'evento che l'incumbent sia DEBOLE, atteso che ha osservato la mossa "guerra" nel primo stadio del gioco)



Modello dell'entrante e dell'incumbent

con informazione incompleta

Profitto atteso dall'entrante, nel primo periodo, se entra (nel primo periodo:

E(Guadagno) = $(1\text{-}p)g_E \;+\; p\, x_0\, g_E \;+\; p\,(1\text{-}x_0)\, c_E$

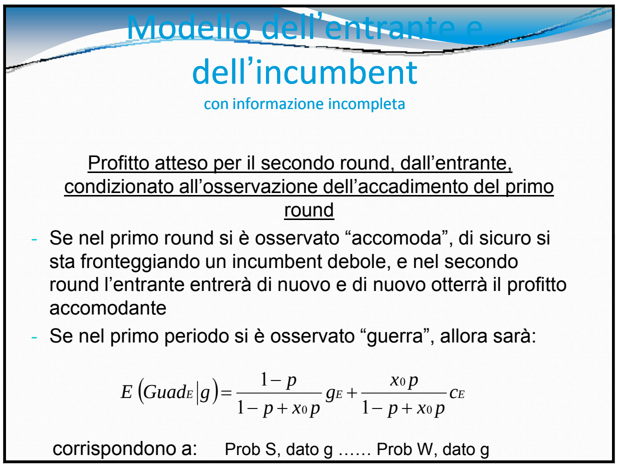
I è forte …

I è debole ma fa cheating …

I è debole e accomoda

Se l'incumbent sceglie di fare "accomoda", allora vuol dire che è debole, e ha scelto di non fare cheating, ossia ha scelto di MANFIESTARSI subito come debole (e nel round successivo ovviamente ripeterà la scelta di accomodare)

Se invece l'incumbet ha scelto "guerra", potrebbe darsi che sia forte davvero, oppure è un debole che fa cheating



Modello dell'entrante e dell'incumbent

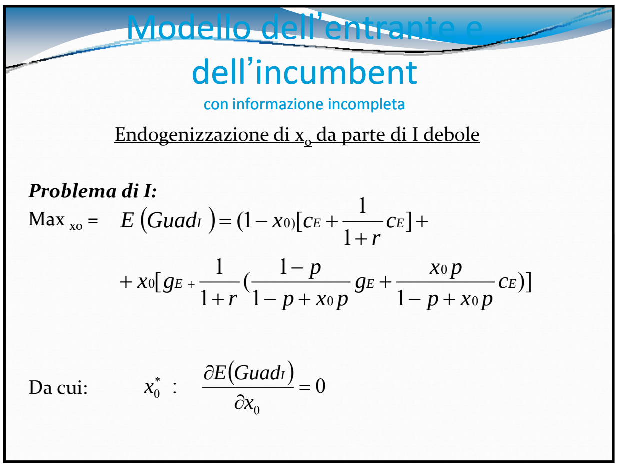
con informazione incompleta

Profitto atteso per il secondo round, dall'entrante, condizionato all'osservazione dell'accadimento del primo round

- Se nel primo round si è osservato "accomoda", di sicuro si sta fronteggiando un incumbent debole, e nel secondo round l'entrante entrerà di nuovo e di nuovo otterrà il profitto accomodante
- Se nel primo periodo si è osservato "guerra", allora sarà:

$$E\left(Guad_E|g\right)=\frac{1-p}{1-p+x_0 p}g_E+\frac{x_0 p}{1-p+x_0 p}c_E$$

corrispondono a: Prob S, dato g …… Prob W, dato g



Modello dell'entrante e dell'incumbent

con informazione incompleta

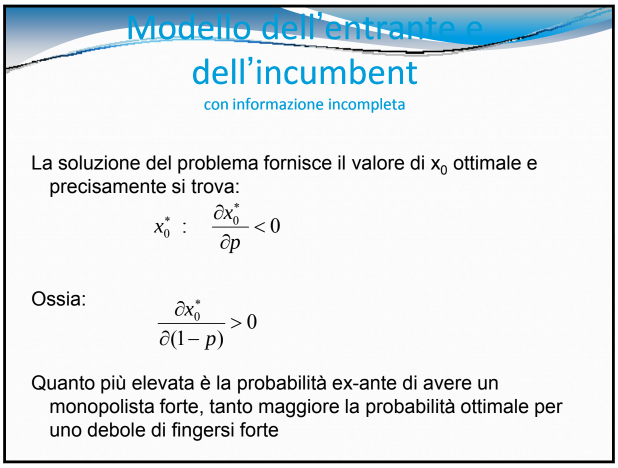
Endogenizzazione di x_o da parte di I debole

Problema di I:

Max $_{xo}$ = $E\left(Guad_I\right) = (1 - x_{0)}[c_E + \frac{1}{1+r}c_E] +$

$$+ x_0[g_{E} + \frac{1}{1+r}(\frac{1-p}{1-p+x_0 p}g_E + \frac{x_0 p}{1-p+x_0 p}c_E)]$$

Da cui: $x_0^* \ : \quad \frac{\partial E\left(Guad_I\right)}{\partial x_0} = 0$



Modello dell'entrante e dell'incumbent

con informazione incompleta

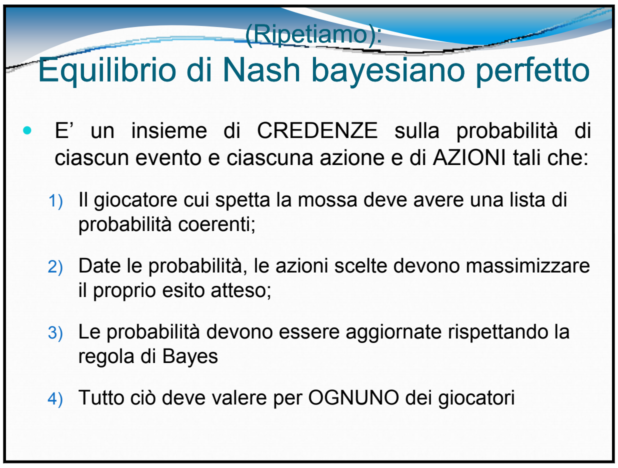
La soluzione del problema fornisce il valore di x_0 ottimale e precisamente si trova:

$$x_0^* \ : \quad \frac{\partial x_0^*}{\partial p} < 0$$

Ossia:

$$\frac{\partial x_0^*}{\partial (1-p)} > 0$$

Quanto più elevata è la probabilità ex-ante di avere un monopolista forte, tanto maggiore la probabilità ottimale per uno debole di fingersi forte



(Ripetiamo): Equilibrio di Nash bayesiano perfetto

- E' un insieme di CREDENZE sulla probabilità di ciascun evento e ciascuna azione e di AZIONI tali che:
  1) Il giocatore cui spetta la mossa deve avere una lista di probabilità coerenti;
  2) Date le probabilità, le azioni scelte devono massimizzare il proprio esito atteso;
  3) Le probabilità devono essere aggiornate rispettando la regola di Bayes
  4) Tutto ciò deve valere per OGNUNO dei giocatori

Parte 11

Ancora su giochi sequenziali

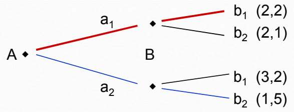
Soluzione di Giochi Sequenziali

- La regola di soluzione è il criterio di *BACKWARD INDUCTION*
- L'equilibrio di BACKWARD INDUCTION è un equilibrio di Nash, che gode del *refinement* di essere
  SUB-GAME PERFECT
  (PERFETTO NEI SOTTOGIOCHI)

Soluzione di Giochi Sequenziali

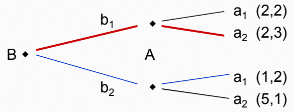
- Esempio (G_5):

prima muove A, poi muove B



N.e.: (a_1-b_1)

prima muove B, poi muove A

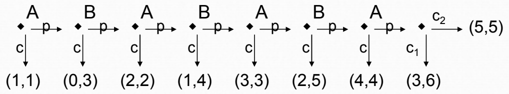


N.e.: (b_1-a_2)

Soluzione di Giochi Sequenziali

- Critica al Criterio di Backward Induction

Paradosso del Centipede di Rosenthal



Parte 12

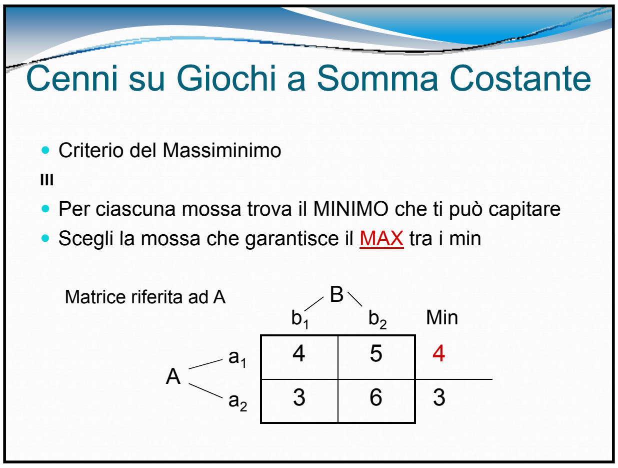
Cenni su giochi a somma costante

Cenni su Giochi a Somma Costante

- Giochi a somma costante, oppure a somma zero
- Giochi di pura distribuzione
- Mors tua ➔ Vita mea
- L'obiettivo individuale di i può essere:

$$Max\,\pi_i \equiv \min(\sum_{j\neq i}\pi_j)$$

- Criterio del Massi-minimo



Cenni su Giochi a Somma Costante

- Criterio del Massiminimo

III

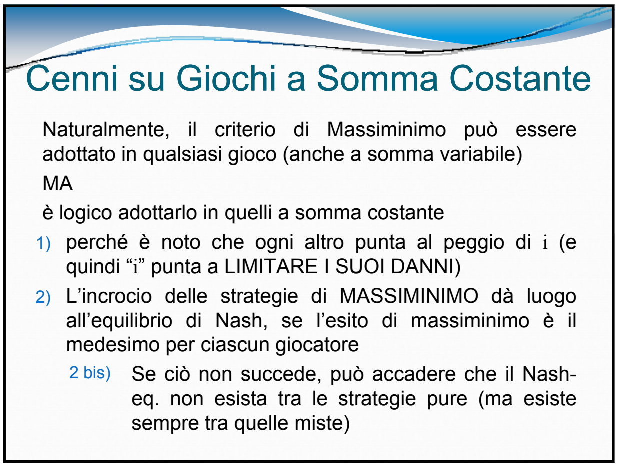
- Per ciascuna mossa trova il MINIMO che ti può capitare
- Scegli la mossa che garantisce il MAX tra i min

Matrice riferita ad A

B

A

	b_1	b_2	Min
a_1	4	5	4
a_2	3	6	3



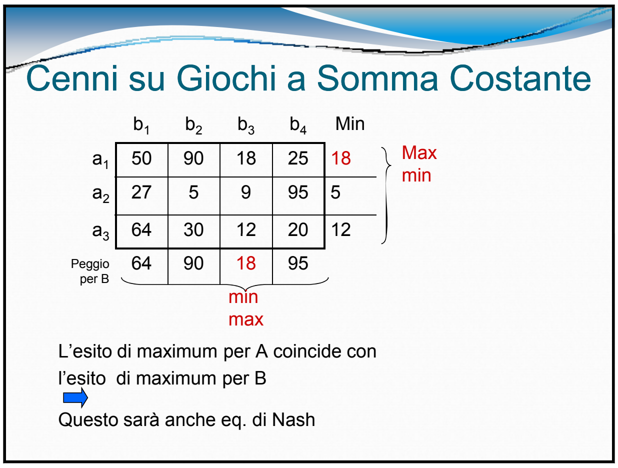
Cenni su Giochi a Somma Costante

Naturalmente, il criterio di Massiminimo può essere adottato in qualsiasi gioco (anche a somma variabile)

MA

è logico adottarlo in quelli a somma costante

1) perché è noto che ogni altro punta al peggio di i (e quindi "i" punta a LIMITARE I SUOI DANNI)
2) L'incrocio delle strategie di MASSIMINIMO dà luogo all'equilibrio di Nash, se l'esito di massiminimo è il medesimo per ciascun giocatore
    - 2 bis) Se ciò non succede, può accadere che il Nash-eq. non esista tra le strategie pure (ma esiste sempre tra quelle miste)



Cenni su Giochi a Somma Costante

	b_1	b_2	b_3	b_4	Min
a_1	50	90	18	25	18
a_2	27	5	9	95	5
a_3	64	30	12	20	12
Peggio per B	64	90	18	95	

Max min

min max

L'esito di maximum per A coincide con l'esito di maximum per B

➡

Questo sarà anche eq. di Nash

Cenni su Giochi a Somma Costante

(Esempio senza equilibrio di Nash nell'ambito delle strategie pure)

- Esempio di gioco a somma costante, senza Nash-eq., nell'ambito delle strategie pure

$$\begin{array}{cc|c|c|c} & & \multicolumn{2}{c}{B} & \\ & & b_1 & b_2 & \\ \cline{3-4} A & a_1 & 80 & 20 & 20 \\ \cline{3-5} & a_2 & 40 & 100 & 40 \\ \cline{3-5} & & 80 & 100 & \end{array} \begin{array}{l} \text{Max} \\ \text{min} \end{array}$$

min max

- NOTA:
  L'esito di massiminimo per A è a2-b1(40), mentre il minimassimo per B è 80 (a1-b1): i due esiti NON coincidono (e quindi non vi è equilibrio di Nash, nell'ambito delle strategeie pure in questogioco a somma costante)

Cenni su Giochi a Somma Costante

(Esempio senza equilibrio di Nash nell'ambito delle strategie pure)

- Randomizziamo le strategie

$$A:\{q_1,q_2\} \qquad B:\{v_1,v_2\}$$

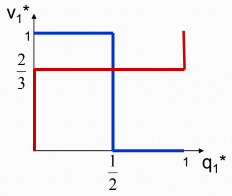
$U_A{}^e = 80q_1v_1 + 20q_1v_2 + 40q_2v_1 + 100q_2v_2 =$
$= (120v_1 – 80)q_1 – 60v_1 + 100$ ....

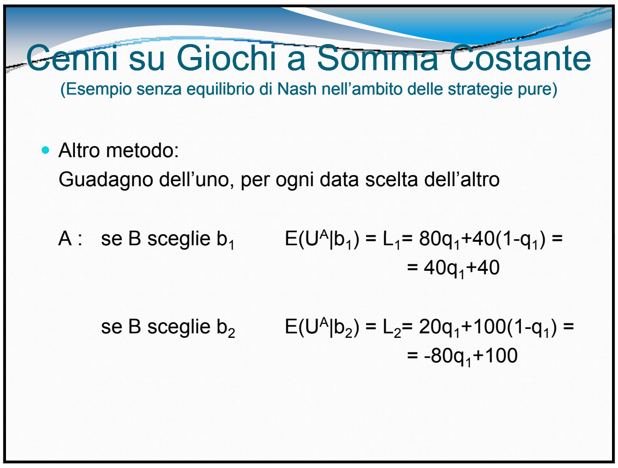
$U_B{}^e =$ (è la stessa di A, ma da rendere minima!) =
$= (120q_1 – 60)v_1 + 80q_1 + 100$

Cenni su Giochi a Somma Costante

(Esempio senza equilibrio di Nash nell'ambito delle strategie pure)

$$q_1^* = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad v_1 > 2/3 \\ 0 & \text{se} \quad v_1 < 2/3 \\ \text{ind} & \text{se} \quad v_1 = 2/3 \end{cases} \qquad v_1^* = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad q_1 < 1/2 \\ 0 & \text{se} \quad q_1 > 1/2 \\ \text{ind} & \text{se} \quad q_1 = 1/2 \end{cases}$$





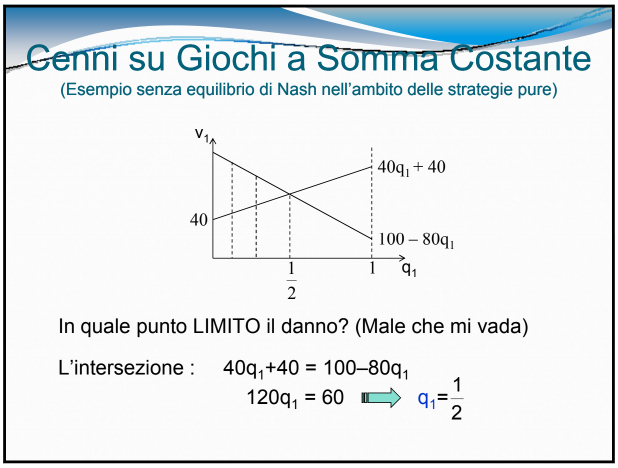
Cenni su Giochi a Somma Costante

(Esempio senza equilibrio di Nash nell'ambito delle strategie pure)

- Altro metodo:
  Guadagno dell'uno, per ogni data scelta dell'altro

A : se B sceglie b_1 $E(U^A|b_1) = L_1 = 80q_1+40(1-q_1) =$
$= 40q_1+40$

se B sceglie b_2 $E(U^A|b_2) = L_2 = 20q_1+100(1-q_1) =$
$= -80q_1+100$

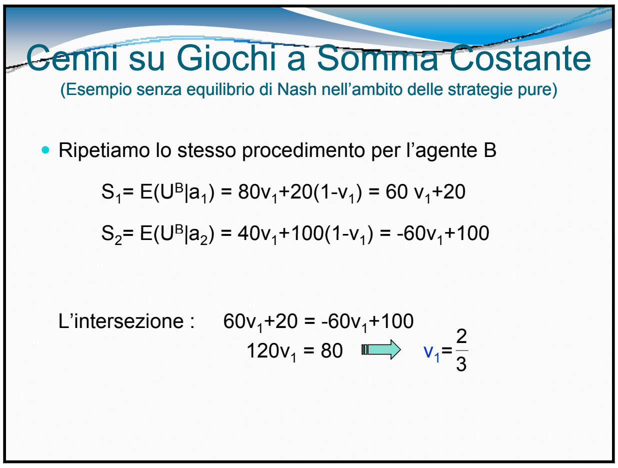


Cenni su Giochi a Somma Costante

(Esempio senza equilibrio di Nash nell'ambito delle strategie pure)

In quale punto LIMITO il danno? (Male che mi vada)

L'intersezione : $40q_1+40 = 100–80q_1$
$120q_1 = 60 \Rightarrow q_1=\frac{1}{2}$



Cenni su Giochi a Somma Costante

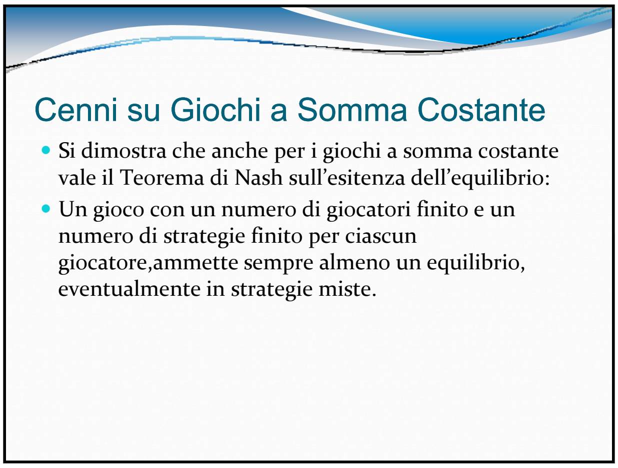
(Esempio senza equilibrio di Nash nell'ambito delle strategie pure)

- Ripetiamo lo stesso procedimento per l'agente B

$S_1= E(U^B|a_1) = 80v_1+20(1-v_1) = 60 v_1+20$

$S_2= E(U^B|a_2) = 40v_1+100(1-v_1) = -60v_1+100$

L'intersezione : $60v_1+20 = -60v_1+100$
$120v_1 = 80 \Rightarrow v_1=\frac{2}{3}$



Cenni su Giochi a Somma Costante

- Si dimostra che anche per i giochi a somma costante vale il Teorema di Nash sull'esitenza dell'equilibrio:
- Un gioco con un numero di giocatori finito e un numero di strategie finito per ciascun giocatore,ammette sempre almeno un equilibrio, eventualmente in strategie miste.